§5 Laplace-Experimente

Viele Fragestellungen der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung führen auf Probleme über Laplace-Experimente. Erfahrungsgemäß haben Anfänger oft Schwierigkeiten beim Lösen derartiger Probleme. Obwohl dabei kaum tiefere mathematische Methoden benötigt werden, stellen viele dieser Fragestellungen nämlich oft hohe Anforderungen an den Intellekt.

Ein Grund für diese Schwierigkeiten des Anfängers ist aber auch oft dessen fehlende Geduld. Die Fragestellungen sind nämlich in der Regel extrem leicht verständlich. Dadurch wird man dazu verführt, die Ermittlung der gesuchten Wahrscheinlichkeit direkt anzugehen ohne zuerst zu überlegen, worin das der Fragestellung zu Grunde liegende Zufallsexperiment überhaupt besteht, ohne den dieses Zufallsexperiment beschreibenden Ereignisraum Ω explizit anzugeben und ohne zu überlegen, ob die durch die Elemente $\omega \in \Omega$ beschriebenen Realisierungen tatsächlich gleich wahrscheinlich sind.

Wir wollen in diesem Abschnitt nur abklären, was man unter einem Laplace-Experiment versteht und an einem einfachen Beispiel die Problematik erläutern, die mit der bei Laplace-Experimenten geforderten Gleichwahrscheinlichkeit aller Realisierungen zusammen hängt.

5.1 Laplace-Experimente

Eine wichtige Klasse von Zufallsexperimenten sind die sogenannten Laplace-Experimente:

5.1.1 Definition: Unter einem Laplace-Experiment versteht man ein Zufallsexperiment mit endlich vielen möglichen Ausgängen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, bei dem auf Grund von geometrischen oder physikalischen Symmetrieüberlegungen alle Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ gleich wahrscheinlich sind.

Beispiele für Laplace-Experimente sind
- das (mehrfache) Werfen einer (homogenen) Münze bzw eines (homogenen) Würfels;
- das Ziehen von (bis auf ihre Farbe gleichartigen) Kugeln aus einer Urne;
- das Ziehen von (gleichartigen) Losen aus einer Urne;
- das zufällige Verteilen von Spielkarten auf mehrere Spieler.

Aus Bemerkung 2.2.5 zusammen mit $\mathbb{P}[\Omega] = 1$ folgt unmittelbar:

5.1.2 Bemerkung: Besitzt ein Laplace-Experiment den Ereignisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, so ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω mit

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{Mächtigkeit der Menge A}}{\text{Mächtigkeit der Menge }\Omega} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

ein geeignetes Modell für den dieses Zufallsexperiment steuernden Zufall.

Achtung! Soll die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ eines Ereignisses A nach der Formel "Anzahl der günstigen Fälle durch Anzahl der möglichen Fälle" berechnet werden, so achte man bereits bei der Konstruktion des Ereignisraums $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ streng darauf, dass alle Elementarereignisse $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}$ tatsächlich gleich wahrscheinlich sind. Man überprüfe diese Gleichwahrscheinlichkeit durch ein Gedankenexperiment.

Mit einem historischen Beispiel wollen wir diese Problematik verdeutlichen:

5.1.3 Beispiel: Der Glücksritter und Spieler de MERÉ diskutierte einst mit B. PASCAL die folgende Frage: Mit drei symmetrischen, vollständig identischen Würfeln wird gleichzeitig gewürfelt. Besitzen die beiden Ereignisse "es wird die Augensumme 11 gewürfelt" und "es wird die Augensumme 12 gewürfelt" die gleiche Wahrscheinlichkeit? (Man vergleiche dazu Beispiel 3.1.3.)

▼

Lösung von de MERE: De MERÉ vertrat den Standpunkt, dass die drei Würfel **nicht unterscheidbar** sind (es handelt sich ja um vollständig identische Würfel). In dieser Situation lässt sich nur festzustellen, wieviele Einser, Zweier, …, Sechser auftreten. Also verwendete de MERÉ bei seinen Überlegungen den Ereignisraum

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_6\} \mid x_i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 3\}$$

wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_6\} \in \Omega$ den Ausgang "es werden x_1 Einser, x_2 Zweier, …, x_6 Sechser gewürfelt" beschreibt. Die beiden Ereignisse "es wird die Augensumme 11 gewürfelt" bzw "es wird die Augensumme 12 gewürfelt" entsprechen damit den beiden Mengen

$$\begin{aligned} A_{11} &= \{\{x_1, x_2, \ldots, x_6\} \in \Omega \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 11\} = \\ &= \{\{0, 0, 1, 2, 0, 0\}, \{0, 0, 2, 0, 1, 0\}, \{0, 1, 0, 1, 1, 0\}, \{0, 1, 1, 0, 0, 1\}, \{1, 0, 0, 0, 2, 0\}, \\ &\quad \{1, 0, 0, 1, 0, 1\}\} \end{aligned}$$

bzw

$$\begin{aligned} A_{12} &= \{\{x_1, x_2, \ldots, x_6\} \in \Omega \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 12\} = \\ &= \{\{0, 0, 0, 3, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 1, 1, 0\}, \{0, 0, 2, 0, 0, 1\}, \{0, 1, 0, 0, 2, 0\}, \{0, 1, 0, 1, 0, 1\}, \\ &\quad \{1, 0, 0, 0, 1, 1\}\} \end{aligned}$$

Setzt man voraus, dass alle Elementarereignisse $\{\omega\} \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind (das war der Fehler von de MERÉ - einen Dreier, einen Vierer und einen Fünfer zu würfeln ist beispielsweise wesentlich wahrscheinlicher, als drei Vierer zu würfeln), so ergibt sich aus der Tatsache, dass die beiden Mengen A_{11} und A_{12} gleich viele Elemente besitzen, dass die beiden Ereignisse "es wird die Augensumme 11 gewürfelt" und "es wird die Augensumme 12 gewürfelt" mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

Tatsächlich hatte de MERÉ aber bei zahlreichen Spielen die Erfahrung gemacht, dass die Augensumme 11 mit etwas höherer Wahrscheinlichkeit eintritt als die Augensumme 12. Er wandte sich deshalb an den Mathematiker B. PASCAL.

Lösung von PASCAL: PASCAL schlug hingegen vor, die drei Würfel als **unterscheidbar** anzusehen (man könnte ja verschieden gefärbte Würfel benützen, ohne das Ergebnis dadurch zu beeinflussen) und verwendete daher den Ereignisraum

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, x_3\} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$$

wobei die Liste $\{x_1, x_2, x_3\} \in \Omega$ die Realisierung "der erste Würfel zeigt die Augenzahl x_1, der zweite Würfel zeigt die Augenzahl x_2 und der dritte Würfel zeigt die Augenzahl x_3" beschreibt. Die beiden Ereignisse "es wird die Augensumme 11 gewürfelt" bzw "es wird die Augensumme 12 gewürfelt" entsprechen nun den Mengen

$$\begin{aligned} A_{11} &= \{\{x_1, x_2, x_3\} \in \Omega \mid x_1 + x_2 + x_3 = 11\} = \\ &= \{\{1, 4, 6\}, \{1, 5, 5\}, \{1, 6, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 5, 4\}, \{2, 6, 3\}, \{3, 2, 6\}, \{3, 3, 5\}, \\ &\quad \{3, 4, 4\}, \{3, 5, 3\}, \{3, 6, 2\}, \{4, 1, 6\}, \{4, 2, 5\}, \{4, 3, 4\}, \{4, 4, 3\}, \{4, 5, 2\}, \{4, 6, 1\}, \\ &\quad \{5, 1, 5\}, \{5, 2, 4\}, \{5, 3, 3\}, \{5, 4, 2\}, \{5, 5, 1\}, \{6, 1, 4\}, \{6, 2, 3\}, \{6, 3, 2\}, \{6, 4, 1\}\} \end{aligned}$$

bzw

$$\begin{aligned}A_{12} &= \{\{x_1, x_2, x_3\} \in \Omega \mid x_1 + x_2 + x_3 = 12\} = \\ &= \{\{1, 5, 6\}, \{1, 6, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 5\}, \{2, 6, 4\}, \{3, 3, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 5, 4\}, \{3, 6, 3\}, \\ &\quad \{4, 2, 6\}, \{4, 3, 5\}, \{4, 4, 4\}, \{4, 5, 3\}, \{4, 6, 2\}, \{5, 1, 6\}, \{5, 2, 5\}, \{5, 3, 4\}, \{5, 4, 3\}, \\ &\quad \{5, 5, 2\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 1, 5\}, \{6, 2, 4\}, \{6, 3, 3\}, \{6, 4, 2\}, \{6, 5, 1\}\}\end{aligned}$$

Setzt man voraus, dass alle Elementarereignisse $\{\omega\} \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind (diese Voraussetzung ist tatsächlich gerechtfertigt), so erhält man auf Grund der Tatsache, dass die Menge A_{11} mehr Elemente besitzt als die Menge A_{12}, dass das Ereignis "es wird die Augensumme 11 gewürfelt" mit etwas höherer Wahrscheinlichkeit eintreten wird als das Ereignis "es wird die Augensumme 12 gewürfelt".