§6 Kombinatorik

▼

```
PermutationenOhneWiederholung[n_Integer] :=
  Permutations[Range[n]]

PermutationenMitWiederholung[n_List] :=
  Permutations[Flatten[Table[Table[i, {n[[i]]}], {i, Length[n]}]]]

KombinationenOhneWiederholung[n_Integer, k_Integer] :=
  Permutations[Join[Table[1, {k}], Table[0, {n - k}]]]

KombinationenOhneWiederholungAlt[n_Integer, 1] := Table[{i}, {i, 1, n}]
KombinationenOhneWiederholungAlt[n_Integer, k_Integer] :=
  Flatten[Map[Table[Append[#, i], {i, Last[#] + 1, n}] &, KombinationenOhneWiederholungAlt[n, k - 1]],
    1]

KombinationenMitWiederholung[1, k_Integer] := {{k}}
KombinationenMitWiederholung[n_Integer, k_Integer] :=
  Flatten[Table[Map[Append[#, i] &, KombinationenMitWiederholung[n - 1, k - i]], {i, 0, k}], 1]

KombinationenMitWiederholungAlt[n_Integer, 1] := Table[{i}, {i, 1, n}]
KombinationenMitWiederholungAlt[n_Integer, k_Integer] :=
  Flatten[Map[Table[Append[#, i], {i, Last[#], n}] &, KombinationenMitWiederholungAlt[n, k - 1]], 1]

VariationenOhneWiederholung[n_Integer, k_Integer] :=
  Flatten[Map[Permutations, KombinationenOhneWiederholungAlt[n, k]], 1]

VariationenMitWiederholung[n_Integer, k_Integer] :=
  Distribute[Table[Table[i, {i, 1, n}], {k}], List]
```

Bei Laplace-Experimenten läuft die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereingisses $A \subseteq \Omega$ auf die Berechnung der Mächtigkeit der Mengen A und Ω hinaus. Oft handelt es sich bei diesen Mengen Ω dabei um Mengen, welche in der Kombinatorik bereits bekannt sind.

Wir werden uns in diesem Abschnitt daher mit einigen Grundmengen der Kombinatorik befassen, diese Mengen genau definieren, aufzeigen, in welchem Zusammenhang sie auftreten und Mathematica-Befehle kennen lernen, mit denen sich diese Mengen erzeugen lassen.

6.1 Permutationen ohne Wiederholung

Bei Permutationen *ohne* Wiederholung geht es um das Anordnen von n Dingen, die mit den Zahlen 1,2,…,n nummeriert sind.

6.1.1 Permutationen *ohne* Wiederholung: Jede mögliche Anordnung von n paarweise verschiedenen Dingen nennt man eine Permutation *ohne* Wiederholung von n Dingen. Die Menge aller Permutationen ohne Wiederholung von n Dingen entspricht der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ paarweise verschieden}\}$$

Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Anordnung "auf dem ersten Platz liegt das Ding mit der Nummer x_1, auf dem zweiten Platz liegt das Ding mit der Nummer x_2, …, auf dem n-ten Platz liegt das Ding mit der Nummer x_n".

Jede mögliche Verteilung von n Kugeln auf n Urnen, wobei in jede Urne genau eine Kugel gelangt, kann als Permutation *ohne* Wiederholung von n Dingen interpretiert werden. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Verteilung "die erste Kugel gelangt in die x_1-te Urne, die zweite Kugel gelangt in die x_2-te Urne, …, die n-te Kugel gelangt in die x_n-te Urne".

6.1.2 Satz: Für die Menge Ω aller Permutationen *ohne* Wiederholung von n Dingen gilt

$$|\Omega| = n!$$

Die Zahl $n!$ lässt sich dabei mit dem Befehl Factorial (oder kurz n !) aufrufen.

▼

Beweis: Wir überlegen, auf wieviele Arten sich Listen $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ bilden lassen: Für x_1 gibt es n Möglichkeiten; ist x_1 gewählt, so bleiben für x_2 noch $(n-1)$ Möglichkeiten übrig; sind x_1 und x_2 gewählt, so bleiben für x_3 noch $(n-2)$ Möglichkeiten übrig; …; sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ gewählt, so bleibt für x_n noch eine einzige Möglichkeit übrig. Es gibt also insgesamt $n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$ derartige Listen.

Beispielsweise lassen sich 50 Bücher wegen

```
N[50 !]
```

```
3.04141×10^64
```

auf etwa 3.04141×10^{64} verschiedene Arten anordnen.

Mit dem folgenden Befehl lässt sich die Menge aller Permutationen *ohne* Wiederholung von n Dingen erzeugen (da die Anzahl der Permutationen *ohne* Wiederholung von n Dingen bereits für kleine n riesig groß ist, sollte dieser Befehl nur für $n < 10$ verwendet werden):

■ PermutationenOhneWiederholung[n]

erzeugt die Menge aller Permutationen *ohne* Wiederholung von n Dingen.

▼

Beispielsweise gilt

```
PermutationenOhneWiederholung[4]
```

```
{{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 4, 3}, {1, 3, 2, 4}, {1, 3, 4, 2}, {1, 4, 2, 3}, {1, 4, 3, 2},
 {2, 1, 3, 4}, {2, 1, 4, 3}, {2, 3, 1, 4}, {2, 3, 4, 1}, {2, 4, 1, 3}, {2, 4, 3, 1},
 {3, 1, 2, 4}, {3, 1, 4, 2}, {3, 2, 1, 4}, {3, 2, 4, 1}, {3, 4, 1, 2}, {3, 4, 2, 1},
 {4, 1, 2, 3}, {4, 1, 3, 2}, {4, 2, 1, 3}, {4, 2, 3, 1}, {4, 3, 1, 2}, {4, 3, 2, 1}}
```

6.2 Permutationen mit Wiederholung

Bei Permutationen *mit* Wiederholung geht es um das Anordnen von $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ Dingen, welche mit den Zahlen

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n_1 \text{ mal}}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n_2 \text{ mal}}, \ldots, \underbrace{k, k, \ldots, k}_{n_k \text{ mal}}$$

nummeriert sind. Dinge, welche die gleiche Nummer zugewiesen bekommen, sind dabei als identisch anzusehen.

6.2.1 Permutationen *mit* Wiederholung: Jede mögliche Anordnung von $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ Dingen, von denen jeweils n_1 bzw n_2 bzw … bzw n_k Dinge identisch sind, nennt man eine Permutation *mit* Wiederholung von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Dingen. Die Menge aller Permutationen mit Wiederholung von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Dingen entspricht der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ wobei jeweils } n_s \text{ der } x_i \text{ gleich } s \text{ sind}\}$$

Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Anordnung "auf dem ersten Platz liegt das Ding mit der Nummer x_1, auf dem zweiten Platz liegt das Ding mit der Nummer x_2, …, auf dem n-ten Platz liegt das Ding mit der Nummer x_n".

Jede mögliche Verteilung von $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ Kugeln auf k Urnen, bei der in die s-te Urne genau n_s Kugeln gelangen, kann als Permutation *mit* Wiederholung von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Dingen interpretiert werden. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ beschreibt dann die Verteilung "die erste Kugel gelangt in die x_1-te Urne, die zweite Kugel gelangt in die x_2-te Urne, …, die n-te Kugel gelangt in die x_n-te Urne".

6.2.2 Satz: Für die Menge Ω aller Permutationen *mit* Wiederholung von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Dingen gilt

$$|\Omega| = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Die Zahl $\frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$ lässt sich dabei mit dem Befehl Multinomial aufrufen.

▼

Beweis: Aus Satz 6.1.2 folgt, dass sich n paarweise verschiedene Dinge auf $n!$ verschiedene Arten anordnen lassen. Damit lassen sich $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ Dinge an sich auf $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!$ Arten anordnen. Da aber jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_k$ dieser Dinge identisch sind, sind nur

$$\frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

dieser $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!$ Anordnungen tatsächlich voneinander verschieden.

Beispielsweise lassen sich die Buchstaben des Wortes SEEREISE wegen

```
Multinomial[2, 4, 1, 1]
```

```
840
```

auf 840 verschiedene Arten anordnen.

Mit dem folgenden Befehl lässt sich die Menge aller Permutationen *mit* Wiederholung von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Dingen erzeugen (man beachte wieder, dass dieser Befehl nur für kleine Werte von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ und k sinnvoll ist):

■ PermutationenMitWiederholung [$\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$]

erzeugt die Menge aller Permutationen *mit* Wiederholung von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Dingen.

▼

Beispielsweise gilt

```
PermutationenMitWiederholung[{2, 1, 2}]
```

```
{{1, 1, 2, 3, 3}, {1, 1, 3, 2, 3}, {1, 1, 3, 3, 2}, {1, 2, 1, 3, 3}, {1, 2, 3, 1, 3},
 {1, 2, 3, 3, 1}, {1, 3, 1, 2, 3}, {1, 3, 1, 3, 2}, {1, 3, 2, 1, 3}, {1, 3, 2, 3, 1},
 {1, 3, 3, 1, 2}, {1, 3, 3, 2, 1}, {2, 1, 1, 3, 3}, {2, 1, 3, 1, 3}, {2, 1, 3, 3, 1},
 {2, 3, 1, 1, 3}, {2, 3, 1, 3, 1}, {2, 3, 3, 1, 1}, {3, 1, 1, 2, 3}, {3, 1, 1, 3, 2},
 {3, 1, 2, 1, 3}, {3, 1, 2, 3, 1}, {3, 1, 3, 1, 2}, {3, 1, 3, 2, 1}, {3, 2, 1, 1, 3},
 {3, 2, 1, 3, 1}, {3, 2, 3, 1, 1}, {3, 3, 1, 1, 2}, {3, 3, 1, 2, 1}, {3, 3, 2, 1, 1}}
```

6.3 Kombinationen ohne Wiederholung

Bei Kombinationen *ohne* Wiederholung geht es um das Auswählen von $k \leq n$ Dingen aus n Dingen, welche mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ nummeriert sind, wobei jedes einzelne Ding höchstens einmal ausgewählt werden darf (Ziehen *ohne* Zurücklegen) und wobei die Reihenfolge, in der diese Auswahl erfolgt, keine Bedeutung hat.

6.3.1 Kombinationen *ohne* Wiederholung: Jede mögliche Auswahl von $k \leq n$ Dingen aus n Dingen, wobei jedes einzelne Ding *höchstens einmal* ausgewählt werden darf und wobei die *Reihenfolge*, in der diese Dinge ausgewählt werden, *keine Bedeutung* hat, nennt man eine Kombination *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen. Die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus n Dingen entspricht der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\}$$

Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Auswahl "es werden genau jene Dinge $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ausgewählt, für die $x_i = 1$ ist".

6.3.2 Satz: Für die Menge Ω aller Kombinationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen gilt

$$|\Omega| = \binom{n}{k}$$

Die Zahl $\binom{n}{k}$ lässt sich dabei mit dem Befehl Binomial aufrufen.

▼

Beweis: Wir zeigen diese Aussage durch vollständige Induktion nach n und bemerken dazu zunächst, dass

$$|\{\{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n+1 \text{ mal}}\}\}| = 1 = \binom{n+1}{0} \quad \text{und} \quad |\{\{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n+1 \text{ mal}}\}\}| = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

gilt. Der springende Punkt unseres Induktionsbeweises liegt nun darin, dass für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ offenbar

$$\{\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = k\} =$$

$$= \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 0\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\} \cup$$

$$\{\{x_1, x_2, \ldots, x_n, 1\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k - 1\}$$

gilt, wobei es sich dabei um eine disjunkte Vereinigung handelt. Wegen der Induktionsannahme gilt damit

$$|\{\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = k\}| =$$

$$= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Beispielsweise gibt es beim Lotto "6 aus 45" wegen

```
Binomial[45, 6]
```

```
8 145 060
```

genau 8 145 060 verschiedene Möglichkeiten für einen Sechser.

Kombinationen *ohne* Wiederholung lassen sich auch noch auf eine andere Weise darstellen:

6.3.3 Kombinationen *ohne* Wiederholung (alternative Darstellung): Die Menge aller Kombinationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen entspricht auch der Menge

$$\Omega_{\text{alt}} = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } x_1 < x_2 < \ldots < x_k\}$$

Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Auswahl "es werden das x_1-te, das x_2-te, … und das x_n-te Ding ausgewählt".

Mit den folgenden Befehlen lässt sich die Menge aller Kombinationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen erzeugen (man beachte wieder, dass diese Befehle nur für kleine Werte von n und k sinnvoll sind):

■ KombinationenOhneWiederholung[*n*, *k*]

erzeugt die Menge aller Kombinationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen.

■ KombinationenOhneWiederholungAlt[*n*, *k*]

erzeugt die *alternative* Menge aller Kombinationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen.

▼

Beispielsweise gilt

KombinationenOhneWiederholung[6, 3]

```
{{1, 1, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 1, 0, 0}, {1, 1, 0, 0, 1, 0}, {1, 1, 0, 0, 0, 1},
 {1, 0, 1, 1, 0, 0}, {1, 0, 1, 0, 1, 0}, {1, 0, 1, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 1, 1, 0},
 {1, 0, 0, 1, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 1, 1}, {0, 1, 1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 0, 1, 0},
 {0, 1, 1, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 1, 1, 0}, {0, 1, 0, 1, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 1, 1},
 {0, 0, 1, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 0, 1, 1}, {0, 0, 0, 1, 1, 1}}
```

KombinationenOhneWiederholungAlt[6, 3]

```
{{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 2, 6}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5},
 {1, 3, 6}, {1, 4, 5}, {1, 4, 6}, {1, 5, 6}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 3, 6},
 {2, 4, 5}, {2, 4, 6}, {2, 5, 6}, {3, 4, 5}, {3, 4, 6}, {3, 5, 6}, {4, 5, 6}}
```

Man beachte dabei, in welcher Weise einander die beiden Listen entsprechen.

6.4 Kombinationen mit Wiederholung

Bei Kombinationen *mit* Wiederholung geht es um das Auswählen von k Dingen aus n Dingen, welche mit den Zahlen $1,2,\ldots,n$ nummeriert sind, wobei jedes einzelne Ding auch mehrmals ausgewählt werden darf (Ziehen *mit* Zurücklegen) und wobei die Reihenfolge, in der diese Auswahl erfolgt, keine Bedeutung hat.

6.4.1 Kombinationen *mit* Wiederholung: Jede mögliche Auswahl von k Dingen aus n Dingen, wobei jedes einzelne Ding *auch mehrmals* ausgewählt werden darf und wobei die *Reihenfolge*, in der diese Dinge ausgewählt werden, *keine Bedeutung* hat, nennt man eine Kombination *mit* Wiederholung von k aus n Dingen. Die Menge aller Kombinationen mit Wiederholung von k aus n Dingen entspricht der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1, \ldots, k\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\}$$

Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Auswahl "das erste Ding wird x_1 mal, das zweite Ding wird x_2 mal, …, das n-te Ding wird x_n mal ausgewählt".

6.4.2 Satz: Für die Menge Ω aller Kombinationen *mit* Wiederholung von k aus n Dingen gilt

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$$

Die Zahl $\binom{n+k-1}{k}$ lässt sich dabei mit dem Befehl Binomial aufrufen.

▼

Beweis: Wir bezeichnen für diesen Beweis die Menge aller Kombinationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen mit C_n^k und die Menge aller Kombinationen *mit* Wiederholung von k aus n Dingen mit D_n^k. Aus der Tatsache, dass die Abbildung $f : D_n^k \to C_{n+k-1}^k$ mit

$$f[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}] = \{1, \underbrace{1, \ldots,}_{x_1 \text{ mal}} 1, 0, 1, \underbrace{1, \ldots,}_{x_2 \text{ mal}} 1, 0, \ldots, 0, 1, \underbrace{1, \ldots,}_{x_n \text{ mal}} 1\}$$

offenbar bijektiv ist, folgt aus Satz 6.3.2 unmittelbar

$$|D_n^k| = |C_{n+k-1}^k| = \binom{n+k-1}{k}$$

Werden beispielsweise bei einer Übung mit $n = 8$ Teilnehmern diese Teilnehmer insgesamt $k = 20$ mal zufällig aufgerufen, so gibt es dafür wegen

```
Binomial[8 + 20 − 1, 20]
```

```
888 030
```

genau 888 030 verschiedene Möglichkeiten.

Kombinationen *mit* Wiederholung lassen sich auch noch auf eine andere Weise darstellen:

6.4.3 Kombinationen *mit* Wiederholung (alternative Darstellung): Die Menge aller Kombinationen *mit* Wiederholung von k aus n Dingen entspricht auch der Menge

$$\Omega_{\text{alt}} = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k\}$$

Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Auswahl "es werden das x_1-te, das x_2-te, … und das x_k-te Ding ausgewählt".

Mit den folgenden Befehlen lässt sich die Menge aller Kombinationen *mit* Wiederholung von k aus n Dingen erzeugen (man beachte wieder, dass diese Befehle wieder nur für kleine Werte von n und k sinnvoll sind):

■ KombinationenMitWiederholung[*n*, *k*]

erzeugt die Menge aller Kombinationen *mit* Wiederholung von k aus n Dingen.

■ KombinationenMitWiederholungAlt[*n*, *k*]

erzeugt die *alternative* Menge aller Kombinationen *mit* Wiederholung von k aus n Dingen.

▼

Beispielsweise gilt

```
KombinationenMitWiederholung[4, 3]
```

```
{{3, 0, 0, 0}, {2, 1, 0, 0}, {1, 2, 0, 0}, {0, 3, 0, 0}, {2, 0, 1, 0},
 {1, 1, 1, 0}, {0, 2, 1, 0}, {1, 0, 2, 0}, {0, 1, 2, 0}, {0, 0, 3, 0},
 {2, 0, 0, 1}, {1, 1, 0, 1}, {0, 2, 0, 1}, {1, 0, 1, 1}, {0, 1, 1, 1},
 {0, 0, 2, 1}, {1, 0, 0, 2}, {0, 1, 0, 2}, {0, 0, 1, 2}, {0, 0, 0, 3}}
```

```
KombinationenMitWiederholungAlt[4, 3]
```

```
{{1, 1, 1}, {1, 1, 2}, {1, 1, 3}, {1, 1, 4}, {1, 2, 2}, {1, 2, 3},
 {1, 2, 4}, {1, 3, 3}, {1, 3, 4}, {1, 4, 4}, {2, 2, 2}, {2, 2, 3}, {2, 2, 4},
 {2, 3, 3}, {2, 3, 4}, {2, 4, 4}, {3, 3, 3}, {3, 3, 4}, {3, 4, 4}, {4, 4, 4}}
```

Man beachte wieder, in welcher Weise einander die beiden Listen entsprechen.

6.5 Variationen ohne Wiederholung

Bei Variationen *ohne* Wiederholung geht es um das Auswählen von $k \leq n$ Dingen aus n Dingen, welche mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ nummeriert sind, wobei jedes einzelne Ding höchstens einmal ausgewählt werden darf (Ziehen *ohne* Zurücklegen) und wobei die Reihenfolge, in der diese Auswahl erfolgt, wesentlich ist.

6.5.1 Variationen *ohne* Wiederholung: Jede mögliche Auswahl von $k \leq n$ Dingen aus n Dingen, wobei jedes einzelne Ding *höchstens einmal* ausgewählt werden darf und wobei die *Reihenfolge*, in der diese Dinge ausgewählt werden, *wesentlich* ist, nennt man eine Variation *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen. Die Menge aller Variationen von k aus n Dingen ohne Wiederholung entspricht der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ paarweise verschieden}\}$$

Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Auswahl "beim ersten Zug wird das x_1-te Ding, beim zweiten Zug wird das x_2-te Ding, …, beim k-ten Zug wird das x_k-te Ding ausgewählt".

Jede mögliche Verteilung von $k \leq n$ Kugeln auf n Urnen, wobei in jede Urne höchstens eine Kugel gelangen darf, kann als Variation *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen interpretiert werden. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$

beschreibt dabei die Verteilung "die erste Kugel gelangt in die x_1-te Urne, die zweite Kugel gelangt in die x_2-te Urne, …, die k-te Kugel gelangt in die x_k-te Urne".

6.5.2 Satz: Für die Menge Ω aller Variationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen gilt

$$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

▼

Beweis: Wir überlegen, auf wieviele Arten sich Listen $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ bilden lassen: Für x_1 gibt es n Möglichkeiten; ist x_1 gewählt, so bleiben für x_2 noch $(n-1)$ Möglichkeiten übrig; sind x_1 und x_2 gewählt, so bleiben für x_3 noch $(n-2)$ Möglichkeiten übrig; …; sind $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ gewählt, so bleiben für x_k noch $(n-k+1)$ Möglichkeiten übrig. Es gibt also insgesamt

$$n\,(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

derartige Listen.

Sollen beispielsweise $k = 6$ Kugeln so auf $n = 9$ Urnen verteilt werden, dass in jede Urne höchstens eine Kugel gelangt, so gibt es dafür wegen

```
9!/(9 - 6)!
```

```
60 480
```

genau 60 480 verschiedene Möglichkeiten.

Mit dem folgenden Befehl lässt sich die Menge aller Variationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen erzeugen (man beachte wieder, dass dieser Befehl nur für kleine Werte von n und k sinnvoll ist):

■ VariationenOhneWiederholung[*n*, *k*]

erzeugt die Menge aller Variationen *ohne* Wiederholung von k aus n Dingen.

▼

Beispielsweise gilt

```
VariationenOhneWiederholung[4, 3]
```

```
{{1, 2, 3}, {1, 3, 2}, {2, 1, 3}, {2, 3, 1}, {3, 1, 2}, {3, 2, 1}, {1, 2, 4}, {1, 4, 2},
 {2, 1, 4}, {2, 4, 1}, {4, 1, 2}, {4, 2, 1}, {1, 3, 4}, {1, 4, 3}, {3, 1, 4}, {3, 4, 1},
 {4, 1, 3}, {4, 3, 1}, {2, 3, 4}, {2, 4, 3}, {3, 2, 4}, {3, 4, 2}, {4, 2, 3}, {4, 3, 2}}
```

6.6 Variationen mit Wiederholung

Bei Variationen *mit* Wiederholung geht es um das Auswählen von k Dingen aus n Dingen, welche mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ nummeriert sind, wobei jedes einzelne Ding auch mehrmals ausgewählt werden darf (Ziehen *mit* Zurücklegen) und wobei die Reihenfolge, in der diese Auswahl erfolgt, wesentlich ist.

6.6.1 Variationen *mit* Wiederholung: Jede mögliche Auswahl von k Dingen aus n Dingen, wobei jedes einzelne Ding *auch mehrmals* ausgewählt werden darf und wobei die *Reihenfolge*, in der diese Dinge ausgewählt werden, *wesentlich* ist, nennt man eine Variation *mit* Wiederholung von k aus n Dingen. Die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus n Dingen entspricht der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Auswahl "beim ersten Zug wird das x_1-te Ding, beim zweiten Zug wird das x_2-te Ding, …, beim n-ten Zug wird das x_n-te Ding ausgewählt".

Jede mögliche Verteilung von $k \leq n$ Kugeln auf n Urnen, wobei in jede Urne auch mehrere Kugeln gelangen dürfen, kann als Variation *mit* Wiederholung von k aus n Dingen interpretiert werden. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ beschreibt dabei die Verteilung "die erste Kugel gelangt in die x_1-te Urne, die zweite Kugel gelangt in die x_2-te Urne, …, die k-te Kugel gelangt in die x_k-te Urne".

6.6.2 Satz: Für die Menge Ω aller Variationen *mit* Wiederholung von k aus n Dingen gilt

$$|\Omega| = n^k$$

▼

Beweis: Wir überlegen, auf wieviele Arten sich Listen $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ bilden lassen: Für jedes der Elemente

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ gibt es n Möglichkeiten. Also gibt es insgesamt n^k derartige Listen.

Sollen beispielsweise $k = 6$ Kugeln auf $n = 9$ Urnen verteilt werden, wobei in jede Urne auch mehrere Kugel gelangen dürfen, so gibt es dafür wegen

9^6

```
531 441
```

genau 531 441 verschiedene Möglichkeiten.

Mit dem folgenden Befehl lässt sich die Menge aller Variationen *mit* Wiederholung von *k* aus *n* Dingen erzeugen (man beachte wieder, dass dieser Befehl nur für kleine Werte von *n* und *k* sinnvoll ist):

■ VariationenMitWiederholung[*n*, *k*]

erzeugt die Menge aller Variationen *mit* Wiederholung von *k* aus *n* Dingen.

▼

Beispielsweise gilt

VariationenMitWiederholung[4, 3]

```
{{1, 1, 1}, {1, 1, 2}, {1, 1, 3}, {1, 1, 4}, {1, 2, 1}, {1, 2, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4},
 {1, 3, 1}, {1, 3, 2}, {1, 3, 3}, {1, 3, 4}, {1, 4, 1}, {1, 4, 2}, {1, 4, 3},
 {1, 4, 4}, {2, 1, 1}, {2, 1, 2}, {2, 1, 3}, {2, 1, 4}, {2, 2, 1}, {2, 2, 2},
 {2, 2, 3}, {2, 2, 4}, {2, 3, 1}, {2, 3, 2}, {2, 3, 3}, {2, 3, 4}, {2, 4, 1},
 {2, 4, 2}, {2, 4, 3}, {2, 4, 4}, {3, 1, 1}, {3, 1, 2}, {3, 1, 3}, {3, 1, 4},
 {3, 2, 1}, {3, 2, 2}, {3, 2, 3}, {3, 2, 4}, {3, 3, 1}, {3, 3, 2}, {3, 3, 3},
 {3, 3, 4}, {3, 4, 1}, {3, 4, 2}, {3, 4, 3}, {3, 4, 4}, {4, 1, 1}, {4, 1, 2},
 {4, 1, 3}, {4, 1, 4}, {4, 2, 1}, {4, 2, 2}, {4, 2, 3}, {4, 2, 4}, {4, 3, 1},
 {4, 3, 2}, {4, 3, 3}, {4, 3, 4}, {4, 4, 1}, {4, 4, 2}, {4, 4, 3}, {4, 4, 4}}
```