§10 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Vor allem dann, wenn man es mit mehrstufigen Zufallsexperimenten zu tun hat, kommt dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eine bedeutende Rolle zu. Wir klären dazu zuerst, was man unter der bedingten Wahrscheinlichkeit versteht und welche Eigenschaften sie besitzt. Anschließend erläutern wir an Hand von zahlreichen Beispielen die praktische Anwendung dieses Begriffs.

10.1 Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Oft hat man es mit einem Zufallsexperiment zu tun, wobei man über die zusätzliche Information "ein gewisses Ereignis Ω' ist bereits eingetreten" verfügt.

Beispiele dafür sind
▪ Beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen von je einer Kugel aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln die Information "die zuerst gezogene Kugel ist rot".
▪ Beim Austeilen von Spielkarten die (durch Kiebitzen) gewonnene Information "ein gewisser Spieler erhielt nur Spielkarten der Farben Herz und Karo".
▪ Bei der Untersuchung von Personen auf TBC die Information "eine Röntgenuntersuchung verlief positiv".

In der Regel wird sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch eine derartige Information ändern. Wir wollen diesen Sachverhalt an einem einfachen Beispiel näher erläutern:

10.1.1 Beispiel: In einer Urne befinden sich zwei rote und drei schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, wobei die zuerst gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der beiden Kugeln schwarz ist, wenn bekannt ist, dass die zuerst gezogene Kugel rot war?

▼

Man könnte nun ein Zufallsexperiment, über das die zusätzliche Information "ein gewisses Ereignis Ω' ist eingetreten" zur Verfügung steht, als neues Zufallsexperiment mit Ω' als Ereignisraum auffassen und in der üblichen Weise behandeln. Am eben vorgeführten Beispiels erkennt man aber, dass

$$\mathbb{P}'[A'] = \frac{\text{Mächtigkeit von } A'}{\text{Mächtigkeit von } \Omega'} = \frac{\text{Mächtigkeit von } A \cap \Omega'}{\text{Mächtigkeit von } \Omega} \times \frac{\text{Mächtigkeit von } \Omega}{\text{Mächtigkeit von } \Omega'} = \frac{\mathbb{P}[A \cap \Omega']}{\mathbb{P}[\Omega']}$$

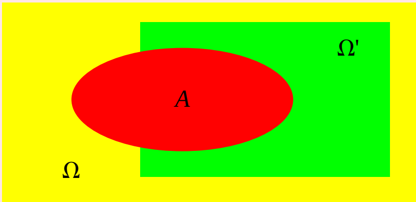
gilt, dass sich also die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}'[A']$ eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis Ω' bereits eingetreten ist, in einfacher Weise durch die unbedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[A \cap \Omega']$ und $\mathbb{P}[\Omega']$ ausdrücken lässt. Wir definieren daher

10.1.2 Definition: Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf dem Ereignisraum Ω und sei $\Omega' \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ heißt die Zahl

$$\mathbb{P}[A \mid \Omega'] = \frac{\mathbb{P}[A \cap \Omega']}{\mathbb{P}[\Omega']}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter Ω'. Man überzeugt sich mühelos davon, dass jene Abbildung $\mathbb{P}[\blacksquare \mid \Omega']$, welche jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A \mid \Omega']$ zuordnet, ebenfalls ein W-Maß auf dem Ereignisraum Ω ist. Man nennt dieses W-Maß das durch Ω' bedingte W-Maß auf Ω.

An Hand einer Zeichnung kann der Unterschied zwischen "bedingter" und "unbedingter" Wahrscheinlichkeit recht einprägsam veranschaulicht werden: Interpretiert man in der folgenden Zeichnung die "unbedingte" Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ des Ereignisses A als Verhältnis der Fläche von A zur Fläche von Ω, so entspricht die "bedingte" Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A \mid \Omega']$ von A unter Ω' dem Verhältnis der Fläche von $A \cap \Omega'$ zur Fläche von Ω'.



Die bedinge Wahrscheinlichkeit besitzt einige elementare, für praktische Belange jedoch sehr wichtige Eigenschaften, welche wir im folgenden Satz zusammenfassen:

10.1.3 Satz: Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf dem Ereignisraum Ω.

Multiplikationssatz: Für beliebige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}] = \mathbb{P}[A_1]\,\mathbb{P}[A_2 \mid A_1] \ldots \mathbb{P}[A_{n+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n]$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: Bilden die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ ein vollständiges Ereignissystem (darunter versteht man paarweise disjunkte Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mit positiver Wahrscheinlichkeit, deren Vereinigung gleich Ω ist), so gilt für alle $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid B_i]\,\mathbb{P}[B_i]$$

Satz von BAYES: Bilden die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ ein vollständiges Ereignissystem, so gilt für alle $A \subseteq \Omega$ und alle $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}[B_{i_0} \mid A] = \frac{\mathbb{P}[A \mid B_{i_0}]\,\mathbb{P}[B_{i_0}]}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid B_i]\,\mathbb{P}[B_i]}$$

▼

Beweis: a) Für beliebige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1} \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[A_1]\ \mathbb{P}[A_2 \mid A_1]\,\mathbb{P}[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \ldots \mathbb{P}[A_{n+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] =$$

$$= \mathbb{P}[A_1]\ \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2]}{\mathbb{P}[A_1]}\ \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2]} \ldots \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}]}{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n]} = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}]$$

b) Bilden die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ ein vollständiges Ereignissystem, so gilt für alle $A \subseteq \Omega$

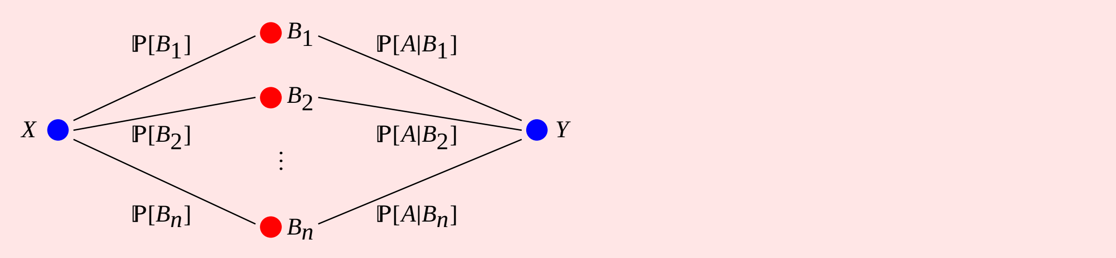
$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap \Omega] = \mathbb{P}[A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)] = \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid B_i]\,\mathbb{P}[B_i]$$

c) Bilden die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ ein vollständiges Ereignissystem, so folgt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für alle $A \subseteq \Omega$ und alle $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}[B_{i_0} \mid A] = \mathbb{P}[A \cap B_{i_0}] / \mathbb{P}[A] = (\mathbb{P}[A \mid B_{i_0}]\,\mathbb{P}[B_{i_0}]) / \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid B_i]\,\mathbb{P}[B_i]$$

Zu diesem Satz sind einige Bemerkungen angebracht:

■ Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit lässt sich durch das folgende Diagramm gut veranschaulichen (vom Punkt X zum Punkt Y stehen die n mögliche Wege über die Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zur Verfügung; die Wahrscheinlichkeit des Weges vom Punkt X über den Punkt B_i zum Punkt Y ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[B_i]$ und $\mathbb{P}[A \mid B_i]$; die Wahrscheinlichkeit des Weges vom Punkt X zum Punkt Y ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Wege):



■ Der Satz von BAYES ist bemerkenswert, da sich damit "von der Wirkung auf die Ursache schließen lässt", was für manche Philosophen auch heute noch ein gewisses Problem darstellt.

10.2 Beispiele

An Hand von einigen typischen Beispielen werden wir nun zeigen, wie der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingesetzt werden kann. Dabei werden wir sehen, dass sich der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit vor allem bei solchen Zufallsexperimenten mit großem Erfolg verwenden lässt, bei denen der Ereignisraum Ω zu kompliziert ist, um explizit angegeben werden zu können. Die Einführung von geeigneten Hilfsereignissen spielt dann eine wesentliche Rolle.

10.2.1 Beispiel: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln werden laufend Kugeln gezogen, ohne diese Kugeln wieder zurückzulegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, die erste rote Kugel beim k-ten Zug zu ziehen? Lösen Sie dieses Beispiel mit Hilfe des Multiplikationssatzes.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für $r = 5$, $s = 10$, $k = 6$.

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit

A_j – beim j-ten Zug wird schwarze Kugel gezogen

Mit dem Multiplikationssatz erhält man also

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap A_k^c] =$$
$$\mathbb{P}[A_1]\,\mathbb{P}[A_2 \mid A_1]\,\mathbb{P}[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \ldots \mathbb{P}[A_{k-1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-2}]\,\mathbb{P}[A_k^c \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}] =$$
$$= \frac{s}{r+s}\,\frac{s-1}{r+s-1}\,\frac{s-2}{r+s-2} \ldots \frac{s-k+2}{r+s-k+2}\,\frac{r}{r+s-k+1} = \frac{s!\,(r+s-k)!\,r}{(r+s)!\,(s-k+1)!}$$

```
r = 5; s = 10; k = 6;
p = (s! (r + s - k)! r)/((r + s)! (s - k + 1)!) // N
```

```
0.041958
```

10.2.2 Beispiel: Von 10000 elektronischen Bauelementen wurden 3000 von einer Firma X und 7000 von einer Firma Y gefertigt. 10% der Bauelemente, die von der Firma X hergestellt wurden, haben nicht geforderte Qualität und 5% der von Y gefertigten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Bauelement, das nicht die geforderte Qualität besitzt, von der Firma X gefertigt wurde?

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit

B_1 das Ereignis “Bauelement wurde von der Firma X hergestellt”,

B_2 das Ereignis “Bauelement wurde von der Firma Y hergestellt” und mit

A das Ereignis "Bauelement erfüllt nicht die geforderte Qualität".

Aus der Angabe entnimmt man

$$\mathbb{P}[B_1] = \frac{3000}{10\,000} = 0.3 \quad \mathbb{P}[B_2] = \frac{7000}{10\,000} = 0.7$$

$$\mathbb{P}[A \mid B_1] = 0.1 \mathbb{P}[A \mid B_2] = 0.05$$

Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (die Ereignisse B_1, B_2 bilden ein vollständiges Ereignissystem) ergibt sich damit

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \mid B_1]\, \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A \mid B_2]\, \mathbb{P}[B_2] = 0.1 \times 0.3 + 0.05 \times 0.7 = 0.065$$

Damit ergibt sich aus dem Satz von Bayes für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[B_1 \mid A]$

$$\mathbb{P}[B_1 \mid A] = \frac{\mathbb{P}[B_1 \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A|B_1]\, \mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{0.1 \times 0.3}{0.065} = 0.4615$$

10.2.3 Beispiel: In einem Betrieb werden täglich $n = 1000$ Stück eines Produkts hergestellt. Davon liefert die erste Maschine 200 Stück mit 5 % Ausschuss, die zweite Maschine 300 Stück mit 4 % Ausschuss und die dritte Maschine 500 Stück mit 2 % Ausschuss. Aus der Tagesproduktion wird ein Stück zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses ausgewählte Stück fehlerhaft ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähle Stück, das fehlerhaft ist, auf der i-ten Maschine hergestellt wurde?

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit B_i das Ereignis "ein zufällig ausgewähltes Stück der Tagesproduktion wurde auf der i-ten Maschine hergestellt" und mit A das Ereignis "ein zufällig ausgewähltes Stück der Tagesproduktion ist fehlerhaft". Aus der Angabe entnimmt man

$$\mathbb{P}[B_i] = 0.2 \qquad \mathbb{P}[B_2] = 0.3 \qquad \mathbb{P}[B_3] = 0.5$$

$$\mathbb{P}[A \mid B_1] = 0.05 \qquad \mathbb{P}[A \mid B_2] = 0.04 \qquad \mathbb{P}[A \mid B_3] = 0.02$$

Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (die Ereignisse B_1, B_2, B_3 bilden ein vollständiges Ereignissystem) ergibt sich damit

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \mid B_1]\, \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A \mid B_2]\, \mathbb{P}[B_2] + \mathbb{P}[A \mid B_3]\, \mathbb{P}[B_3] = 0.032$$

Damit ergibt sich aus dem Satz von Bayes für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[B_i \mid A]$

$$\mathbb{P}[B_i \mid A] = \frac{\mathbb{P}[B_i \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\, \mathbb{P}[B_i]}{\mathbb{P}[A]}$$

$$\mathbb{P}[B_1 \mid A] = \frac{0.05 \times 0.2}{0.032} = 0.3125 \qquad \mathbb{P}[B_2 \mid A] = \frac{0.04 \times 0.3}{0.032} = 0.375 \qquad \mathbb{P}[B_3 \mid A] = \frac{0.02 \times 0.5}{0.032} = 0.3125$$

10.2.4 Beispiel: Eine Hochschule wird von n Studenten besucht, von denen sich n_k im k-ten Studienjahr befinden ($k = 1, 2, 3$). Bei zwei zufällig befragten Studenten erwies es sich, dass der eine bereits länger studiert als der andere. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich dieser Student bereits im dritten Studienjahr befindet?

▼

Lösung: Für alle $i, k \in \{1, 2, 3\}$ bezeichne E_i das Ereignis "der erste befragte Student befindet sich im i-ten Studienjahr" und Z_k das Ereignis "der zweite befragte Student befindet sich im k-ten Studienjahr". Die Ereignisse $C_{i\,k} = E_i \cap Z_k$ bilden ein vollständiges Ereignissystem. Außerdem gilt für $i \neq k$

$$\mathbb{P}[C_{i\,k}] = \mathbb{P}[E_i \cap Z_k] = \mathbb{P}[E_i]\; \mathbb{P}[Z_k \mid E_i] = \frac{n_i\, n_k}{n\,(n-1)}$$

Es bezeichne weiter A das Ereignis "mindestens einer der beiden ausgewählten Studenten studiert im dritten Studienjahr" und B das Ereignis "die beiden ausgewählten Studenten studieren nicht im gleichen Studienjahr". Diese beiden Ereignisse lassen sich durch die Ereignisse $C_{i\,k}$ in der folgenden Weise darstellen:

$$A = C_{13} \cup C_{31} \cup C_{23} \cup C_{32} \cup C_{33} \qquad \text{und} \qquad B = C_{12} \cup C_{21} \cup C_{13} \cup C_{31} \cup C_{23} \cup C_{32}$$

Nun gilt aber offenbar

$$\mathbb{P}[B \mid C_{12}] = \mathbb{P}[B \mid C_{21}] = \mathbb{P}[B \mid C_{13}] = \mathbb{P}[B \mid C_{31}] = \mathbb{P}[B \mid C_{23}] = \mathbb{P}[B \mid C_{32}] = 1$$

und

$$\mathbb{P}[B \mid C_{11}] = \mathbb{P}[B \mid C_{22}] = \mathbb{P}[B \mid C_{33}] = 0$$

Aus dem Satz von Bayes ergibt sich damit für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A \mid B]$

$$\mathbb{P}[A \mid B] = \mathbb{P}[C_{13} \mid B] + \mathbb{P}[C_{31} \mid B] + \mathbb{P}[C_{23} \mid B] + \mathbb{P}[C_{32} \mid B] + \mathbb{P}[C_{33} \mid B]$$
$$= \frac{\mathbb{P}[C_{13}] + \mathbb{P}[C_{31}] + \mathbb{P}[C_{23}] + \mathbb{P}[C_{32}]}{\mathbb{P}[C_{12}] + \mathbb{P}[C_{21}] + \mathbb{P}[C_{13}] + \mathbb{P}[C_{31}] + \mathbb{P}[C_{23}] + \mathbb{P}[C_{32}]} = \frac{n_1\, n_3 + n_2\, n_3}{n_1\, n_2 + n_1\, n_3 + n_2\, n_3}$$

10.2.5 Beispiel: Es liegt zwei Warenpartien vor, von denen bekannt ist, dass in der Partie jede Ware den geforderten Anforderungen genügt, während in der anderen Partie 1/4 aller Waren Ausschuss ist. Eine Ware, die man willkürlich (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) einer der beiden Partien entnahm, war einwandfrei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zweite, derselben Partie entnommene Ware ebenfalls einwandfrei ist, wenn man die zuerst entnommene Ware nach der Überprüfung wieder der entsprechenden Partie zugefügt hat?

▼

Lösung:

L_1 - 1.Probe wurde aus Los 1 gezogen

L_2 - 1. Probe wurde aus Los 2 gezogen

A - 1. Probe einwandfrei

B - 2. Probe einwandfrei

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A | L_1)\, \mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(B \cap A | L_2)\, \mathbb{P}(L_2)}{\mathbb{P}(A | L_1)\, \mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(A | L_2)\, \mathbb{P}(L_2)} = \frac{25}{28}$$

wobei

$$\mathbb{P}(B \cap A \mid L_1) = 1,$$

$$\mathbb{P}(B \cap A \mid L_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\mathbb{P}(L_1) = \mathbb{P}(L_2) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(A \mid L_1) = 1,$$

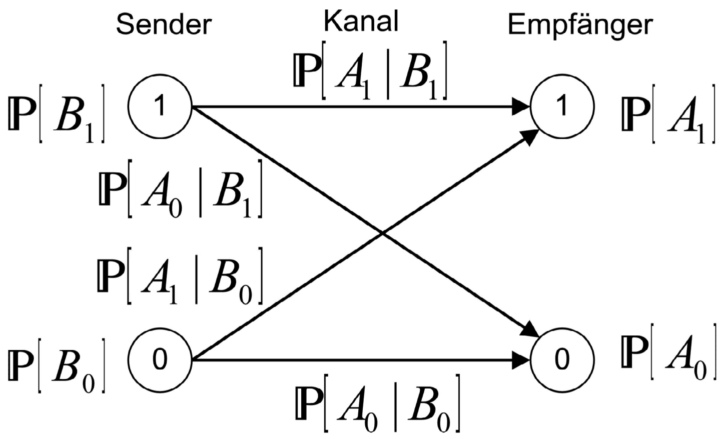
$$\mathbb{P}(A \mid L_2) = \frac{3}{4}$$

10.2.6 Beispiel: (Binärer Kanal): Auf einem Übertragungskanal zur Übermittlung binär (0,1) kodiert Daten (Abbildung) können Fehler auftreten, wenn ein übertragenes Zeichen nicht richtig erkannt wird. Im Folgenden entspreche die Aussendung des Zeichens i dem Ereignis B_i und der Empfang dem Ereignis A_i. Durch

Messungen wurden folgende Daten ermittelt:
95% aller “1” werden richtig übertragen, d.h. $\mathbb{P}[A_1 \mid B_1] = 0.95$
92% aller “0” werden richtig übertragen, d.h. $\mathbb{P}[A_0 \mid B_0] = 0.92$
45% aller übertragenen Zeichen sind “0”, d.h. $\mathbb{P}[B_0] = 0.45 \Rightarrow \mathbb{P}[B_1] = 0.55$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Übertragungsfehler auftritt?

▼

Lösung:



Zur Lösung dieser Fragestellung verwendet man als Ereignissraum $\Omega = \{0, 1\}^2$, wobei das Ereignis $(B, A) \in \Omega$ beschreibt, dass das Bit B gesendet und A empfangen wurde. Gesucht ist nun

$$\mathbb{P}[\text{Error}] = \mathbb{P}[\{(0, 1), (1, 0)\}] = \mathbb{P}[\{(0, 1)\}] + \mathbb{P}[\{1, 0\}].$$

Nun gilt offenbar

$$\mathbb{P}[\text{Error}] = \mathbb{P}[A_1 \cap B_0] + \mathbb{P}[A_0 \cap B_1] = \mathbb{P}[A_1 \mid B_0]\,\mathbb{P}[B_0] + \mathbb{P}[A_0 \mid B_1]\,\mathbb{P}[B_1] = 0.08 \times 0.45 + 0.05 \times 0.55 = 0.0635$$

Die $\mathbb{P}[B_i \mid A]$ im Satz von Bayes werden auch als a posteriori Wahrscheinlichkeit bezeichnet.

10.2.7 Beispiel: (MAP-Detektor): Bei einem MAP (Maximum a posteriori)-Detektor wird die Klassifikation des Empfangssignals aufgrund der a posteriori Wahrscheinlichkeit durchgeführt. Wir setzen das Beispiel 10.2.6 fort und fragen nun nach der Wahrschenlichkeit, dass eine “1” gesendet wurde unter der Bedingung, dass eine “0” empfangen wurde.

▼

Lösung:

Definieren wir

$$B_1 = \{(1, 0), \{1, 1\}\} \text{ und } A_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$$

Nach dem Satz von Bayes erhält man also

$$\mathbb{P}[B_1 \mid A_0] = \frac{\mathbb{P}[A_0|B_1]\,\mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A_0|B_0]\,\mathbb{P}[B_0] + \mathbb{P}[A_0|B_1]\,\mathbb{P}[B_1]} = \frac{0.05 \times 0.55}{0.92 \times 0.45 + 0.05 \times 0.55} = 0.062$$