§11 Unabhängige Ereignisse

In engem Zusammenhang mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit steht der Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen. Wir klären zuerst, was man unter unabhängigen Ereignissen versteht und zeigen anschließend wieder an Hand von zahlreichen Beispielen, wie man diesen Begriff bei der Behandlung von konkreten Problemen einsetzen kann.

11.1 Unabhängigkeit von Ereignissen

In der Regel wird sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ eines Ereignisses A von der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A \mid B]$ dieses Ereignisses A unter der Bedingung B unterscheiden. Ist jedoch $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \mid B]$, so bedeutet das, dass die zusätzliche Information "das Ereignis B ist eingetreten" keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A hat.

Beispiele für derartige Ereignisse sind
- Beim zweimaligen Werfen eines Würfels die beiden Ereignisse "beim ersten Wurf wird eine Drei geworfen" und "beim zweiten Wurf wird eine Sechs geworfen";
- Beim zweimaligen Ziehen mit Zurücklegen von je einer Kugel aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln die beiden Ereignisse "beim ersten Zug wird eine rote Kugel gezogen" und "beim zweiten Zug wird eine schwarze Kugel gezogen";
- Beim radioaktiven Zerfall einer vorgegebenen Substanz mit bekannter (im Verhältnis zur Beobachtungsdauer großer) Halbwertszeit die beiden Ereignisse "im Zeitintervall $[s_1, t_1]$ zerfallen n_1 Teilchen" und "im dazu disjunkten Zeitintervall $[s_2, t_2]$ zerfallen n_2 Teilchen".

Nun sind aber die beiden Beziehungen

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \mid B] = \mathbb{P}[A \cap B] / \mathbb{P}[B] \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$$

gleichbedeutend, wobei letztere auch für Ereignisse B mit $\mathbb{P}[B] = 0$ sinnvoll ist. Wir definieren daher

11.1.1 Definition: Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf dem Ereignisraum Ω.

a) Die beiden Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen unabhängig, falls gilt

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$$

b) Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ heißen paarweise unabhängig, falls für alle $i \neq k$ gilt

$$\mathbb{P}[A_i \cap A_k] = \mathbb{P}[A_i]\,\mathbb{P}[A_k]$$

c) Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ heißen vollständig unabhängig, falls für jede Auswahl von $k \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedenen Ereignissen $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ stets gilt

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \mathbb{P}[A_{i_1}]\,\mathbb{P}[A_{i_2}] \ldots \mathbb{P}[A_{i_k}]$$

Zu dieser Definition sind einige Bemerkungen angebracht:

- Die Unabhängigkeit von Ereignissen geht beim Übergang zu einem anderen W-Maß $\mathbb{P}'$ im allgemeinen verloren. Man spricht deshalb auch von der $\mathbb{P}$-Unabhängigkeit.

■ Die vollständige Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ zieht ihre paarweise Unabhängigkeit nach sich; umgekehrt folgt aber aus der paarweisen Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ nicht ihre vollständige Unabhängigkeit. Ist beispielsweise $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und ist $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf dieser Menge Ω, gilt also $\mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{2\}] = \mathbb{P}[\{3\}] = \mathbb{P}[\{4\}] = 1/4$, so sind die drei Ereignisse $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ und $C = \{2, 3\}$ zwar paarweise unabhängig aber nicht vollständig unabhängig.

■ Gilt für die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1]\,\mathbb{P}[A_2] \ldots \mathbb{P}[A_n]$$

so folgt daraus noch nicht, dass diese Ereignisse vollständig unabhängig sind. Ist etwa $\Omega = \{1, 2, \ldots, 8\}$ und ist $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf der Menge Ω, so gilt für die Ereignisse $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 5, 7, 8\}$ zwar $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = 1/8 = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C]$ aber $\mathbb{P}[A \cap C] = 1/8 \neq 1/4 = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[C]$.

Unabhängige Ereignisse besitzen einige elementare, für praktische Belange jedoch sehr wichtige Eigenschaften:

11.1.2 Satz: Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf dem Ereignisraum Ω.

a) **Ersetzen von Ereignissen durch ihr Komplement:** Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ paarweise bzw vollständig unabhängig, und ersetzt man einige dieser Ereignisse A_i durch ihr Komplement ${A_i}^c$, so bleibt ihre paarweise bzw vollständige Unabhängigkeit erhalten.

b) **Siebformel von SYLVESTER:** Sie die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ vollständig unabhängig, so gilt

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n] = 1 - (1 - \mathbb{P}[A_1])\,(1 - \mathbb{P}[A_2]) \ldots (1 - \mathbb{P}[A_n])$$

▼

Beweis: a) Wir zeigen exemplarisch: Sind die beiden Ereignisse A und B unabhängig, so gilt

$$\mathbb{P}[A \cap B^c] = \mathbb{P}[A - A \cap B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A]\,(1 - \mathbb{P}[B]) = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B^c]$$

b) Sie die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ vollständig unabhängig, so gilt wegen a)

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n] = 1 - \mathbb{P}[{A_1}^c \cap {A_2}^c \cap \ldots \cap {A_n}^c] = 1 - \mathbb{P}[{A_1}^c]\,\mathbb{P}[{A_2}^c] \ldots \mathbb{P}[{A_n}^c] =$$

$$= 1 - (1 - \mathbb{P}[A_1])\,(1 - \mathbb{P}[A_2]) \ldots (1 - \mathbb{P}[A_n])$$

11.2 Beispiele

An einigen typischen Beispielen werden wir nun zeigen, wie der Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen angewendet werden kann.

11.2.1 Beispiel: Zwei Münzen werden geworfen. Es soll geprüft werden, ob drei zufälligen Ereignisse

$A :=$ {erste Münze zeigt Kopf} = {KK, KZ}

$B :=$ {zweite Münze zeigt Kopf} = {KK, ZK}

$C :=$ {genau eine Münze zeigt Kopf} = {KZ, ZK}

vollständig unabhängig zueinander sind.

▼

Lösung: In diesem Experiment treten die obigen Ereignisse mit folgender Wahrscheinlichkeit auf

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{1}{2}$$

Die Ereignisse A, B, C sind paarweise unabhängig

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$$

$$\mathbb{P}[A \cap C] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[C]$$

$$\mathbb{P}[B \cap C] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C]$$

Wegen $A \cap B \cap C = 0$ und

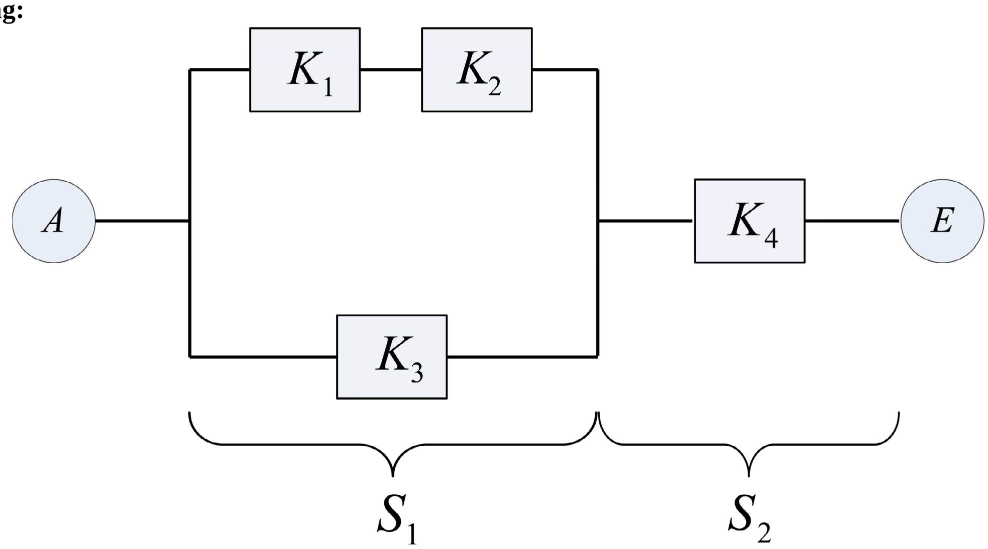
$$0 = \mathbb{P}[A \cap B \cap C] \neq \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C] = \frac{1}{8}$$

sind die 3 zufälligen Ereignisse nach der Definition 11.2.1 nicht vollständig unabhängig, obwohl sie paarweise unabhängig sind.

11.2.2 Beispiel (Intaktwahrscheinlichkeit des Systems): Die Intaktwahrscheinlichkeit p_S eines Systems S beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der das System fehlerfrei läuft. Mit $(1-p)$ wird die Wahrscheinlichkeit des Systemausfalls beschrieben. Ein System bestehe aus vier vollständig unabhängigen Komponenten K_1, K_2, K_3 und K_4 (Abbildung), welche jeweils eine Intaktwahrscheinlichkeit p besitzen. Die Komponente K_3 stellt hierbei ein Backup-System für die Komponenten K_1 und K_2 dar. Bei der Analyse des Systems S stellt sich die Frage: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, mit der das System S ausfällt?

▼

Lösung:



Die Intaktwahrscheinlichkeit des Systems S ist

$$p_S = \mathbb{P}[S \text{ intakt}] = \mathbb{P}[S_1 \text{ intakt } \cap\ S_2 \text{ intakt}] = \mathbb{P}[S_1 \text{ intakt}]\,\mathbb{P}[S_2 \text{ intakt}] =$$

$$= (1 - \mathbb{P}[S_1 \text{ defekt}])\, p$$

Ausfallwahrscheinlichkeit des Teilsystems S_1

$$\mathbb{P}[S_1 \text{ defekt}] = \mathbb{P}[(K_1 \text{ defekt } \cup\ K_2 \text{ defekt}) \cap\ K_3 \text{ defekt}] = \mathbb{P}[K_1 \text{ defekt } \cup\ K_2 \text{ defekt}]\,\mathbb{P}[K_3 \text{ defekt}]$$

$$\mathbb{P}[K_1 \text{ defekt } \cup\ K_2 \text{ defekt}] =$$
$$\mathbb{P}[K_1 \text{ defekt}] + \mathbb{P}[K_2 \text{ defekt}] - \mathbb{P}[K_1 \text{ defekt } \cap\ K_2 \text{ defekt}] = 1 - p + 1 - p - (1-p)^2 = 1 - p^2$$

$$\mathbb{P}[S_1 \text{ defekt}] = (1 - p^2)\,(1 - p) = 1 - p - p^2 + p^3$$

Durch Einsetzen

$$p_S = (1 - (1 - p - p^2 + p^3))\, p = p^2 (1 + p - p^2)$$

Nimmt man an, die Intaktwahrscheinlichkeit jeder Komponente ist gleich 0.9, ergibt sich für die Intaktwahrscheinlichkeit des Systems S

$$p_S = 0.9^2\,(1 + 0.9 - 0.9^2) = 0.8829$$

11.2.3 Beispiel: Durch einen Kanal werden zwei Kodeworte 11111 und 00000 mit den Wahrscheinlichkeiten 0.7 (bzw 0.3) übertragen. Bei der Übertragung können Störungen auftreten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Symbol (0 oder 1) richtig empfangen wird, ist 0.6. Es wird angenommen, daß alle Symbole voneinander unabhängig gestört werden. Der Empfänger hat das Wort 10110 registriert. Welches von beiden Worten wurde mit größerer Wahrscheinlichkeit gesendet?

▼

Lösung: Definieren wir folgende Ereignisse

A :={das Wort “10110” wird registriert} und

B_1 (bzw B_2) :={die Kombination “11111” (bzw “00000”) wird übertragen}

Aus der Angabe entnimmt man

$\mathbb{P}[B_1] = 0.7$ und $\mathbb{P}[B_2] = 0.3$.

Die beiden Ereignisse B_1 und B_2 bilden offenbar ein vollständiges Ereignissystem

$\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[B_2] = 1$

Es wird angenommen, daß die Symbole unabhängig gestört werden, d.h. die bedingte Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[A \mid B_1]$ und $\mathbb{P}[A \mid B_2]$ werden wir folgt bestimmt

$\mathbb{P}[A \mid B_1] = 0.6 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.4 = 0.035$ (“11111” ⇒ “10110”)

$\mathbb{P}[A \mid B_2] = 0.4 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 = 0.023$ (“00000” ⇒ “10110”)

Damit ergibt sich aus dem Satz von Bayes für die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[B_1 \mid A]$ und $\mathbb{P}[B_2 \mid A]$

$$\mathbb{P}[B_1|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_1]\,\mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A|B_1]\,\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]} = \frac{0.035 \cdot 0.7}{0.035 \times 0.7 + 0.023 \times 0.3} = 0.78$$

$$\mathbb{P}[B_2|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]}{\mathbb{P}[A|B_1]\,\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2]\,\mathbb{P}[B_2]} = \frac{0.023 \cdot 0.3}{0.035 \times 0.7 + 0.023 \times 0.3} = 0.22$$

$\mathbb{P}[B_1 \mid A] > \mathbb{P}[B_2 \mid A] \Rightarrow$

Wenn die Kombination \`10110´ wird registriert, dann mit größer Warhrscheinlichkeit 0.78 wird das Kodewort “11111” gesendet.

11.2.4 Beispiel (Die Formel von BERNOULLI): Gegeben sind die vollständig unabhängigen, gleichwahrscheinlichen Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k dieser Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eintreten?

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit $p = \mathbb{P}[A_i]$ die für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gleichen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A_i und für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ der Mächtigkeit k mit B_I das Ereignis

$$B_I = \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{i \in I^c} A_i^{\,c}\Big)$$

Ersetzt man einige der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ durch ihr Komplement, so beeinflusst dies wegen Satz 11.1.2 ihre vollständige Unabhängigkeit nicht. Damit gilt für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mit k Elementen

$$\mathbb{P}[B_I] = \mathbb{P}[(\bigcap_{i\in I} A_i) \cap (\bigcap_{i\in I^c} A_i{}^c)] = \prod_{i\in I} \mathbb{P}[A_i] \prod_{i\in I^c} \mathbb{P}[A_i{}^c] = p^k (1-p)^{n-k}$$

Für die Wahrscheinlichkeit des uns interessierenden Ereignisses B, dass genau k der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eintreten, gilt damit (aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ lassen sich bekanntlich auf "n über k" verschiede Arten Teilmengen I mit der Mächtigkeit k auswählen)

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[\bigcup_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ |I|=k}} B_I] = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ |I|=k}} \mathbb{P}[B_I] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

11.2.5 Beispiel: Durch einen Kanal werden n unabhängige Kodeworte übertragen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kodewort richtig empfangen wird, ist 0.9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das mindestens $m \leq n$ aller Kodeworte richtig empfangen werden?

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit A_i das Ereignis “das i-te ausgewählte Kodewort wird richtig empfangen”,

$$p = \mathbb{P}[A_i] = 0.9.$$

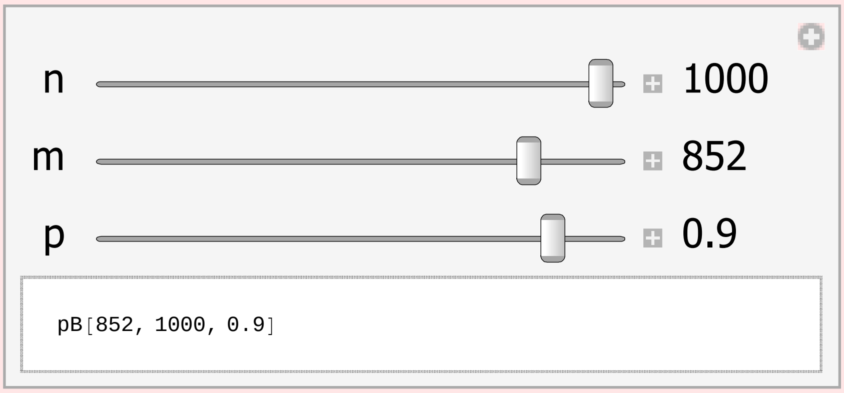
Aus der Formel von BERNOULLI ergibt sich damit für das Ereignis B_k, dass sich unter n ausgewählten Kodeworten genau k richtig emfangen werden, die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[B_k] = \binom{n}{k} 0.9^k\, 0.1^{n-k}$$

und damit

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[\bigcup_{k=m}^{n} B_k] = \sum_{k=m}^{n} \mathbb{P}[B_k] = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

```
pB[m_, n_, p_] := Sum[Binomial[n, k] p^k (1 - p)^(n-k), {k, m, n}];
Manipulate[If[m ≤ n, pB[m, n, p]], {n, 1, 1000, 1, Appearance → "Labeled"},
  {m, 1, 1000, 1, Appearance → "Labeled"}, {p, 0, 1, 0.1, Appearance → "Labeled"}]
```



11.2.6 Beispiel: Wieviele Zahlen muß man einer Tabelle von im Intervall [0, 1] gleichverteilten Zufallszahlen (mit jeweils 5 Stellen) entnehmen, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit sicher zu stellen, dass sich unter den ausgewählten Zahlen genau drei befinden, die mit einer 7 enden?

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit A_i das Ereignis "die i-te ausgewählte Zufallszahl endet mit einer 7". Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ sind vollständig unabhängig und es gilt $p = \mathbb{P}[A_i] = 1/10$. Aus der Formel von BERNOULLI ergibt sich damit für das Ereignis B, dass sich unter n ausgewählten Zufallszahlen genau drei befinden, welche mit einer 7 enden, die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[B] = \binom{n}{3} 0.1^3\, 0.9^{n-3}$$

Wir werten diese Formel mit Hilfe von *Mathematica* aus

```
Table[{n, Binomial[n, 3] 0.1^3 0.9^(n-3)}, {n, 20, 40}]
```

```
{{20, 0.19012}, {21, 0.199626}, {22, 0.208031}, {23, 0.215312},
 {24, 0.221464}, {25, 0.226497}, {26, 0.230436}, {27, 0.233317},
 {28, 0.235183}, {29, 0.236088}, {30, 0.236088}, {31, 0.235245},
 {32, 0.233622}, {33, 0.231286}, {34, 0.228302}, {35, 0.224735},
 {36, 0.220649}, {37, 0.216106}, {38, 0.211166}, {39, 0.205887}, {40, 0.200323}}
```

und erkennen, dass für $n = 29$ bzw $n = 30$ die Wahrscheinlichkeit mit 0.236088 dafür am größten ist, dass sich unter n im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen genau drei befinden, die mit einer 7 enden.

11.2.7 Beispiel (Das Telefonanschluss-Problem): Eine Telefonzentrale bedient $n = 100$ Teilnehmer. Jeder Teilnehmer benötigt sein Telefon unabhängig von den anderen Teilnehmern durchschnittlich 12 Minuten pro Stunde. Wieviele Amtsleitungen a sind erforderlich, um sicherzustellen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % alle Teilnehmer, die telefonieren wollen, sofort bedient werden können.

▼

Lösung: Wir wählen zufällig einen Zeitpunkt aus und bezeichnen mit A_i das Ereignis "der i-te Teilnehmer benötigt zu diesem Zeitpunkt sein Telefon". Aus der Angabe entnimmt man, dass die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vollständig unabhängig sind und $p = \mathbb{P}[A_i] = 1/5$ ist. Bezeichnen wir mit B_k das Ereignis "von den $n = 100$ Teilnehmern benötigen genau k Teilnehmer zu diesem Zeitpunkt ihr Telefon" und mit C_m das Ereignis "mit m Amtsleitungen können zu diesem Zeitpunkt alle Teilnehmer bedient werden", so folgt aus der Formel von BERNOULLI

$$\mathbb{P}[C_m] = \mathbb{P}\Big[\bigcup_{k=0}^{m} B_k\Big] = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}[B_k] = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Wir werten diese Formel mit Hilfe von *Mathematica* aus

```
n = 100; p = 1/5;
Table[{m, Sum[Binomial[n, k] p^k (1 - p)^(n-k), {k, 0, m}] // N}, {m, 20, 30}]
Clear[n, p]
```

```
{{20, 0.559462}, {21, 0.654033}, {22, 0.738933},
 {23, 0.810913}, {24, 0.868647}, {25, 0.912525}, {26, 0.944167},
 {27, 0.965848}, {28, 0.97998}, {29, 0.988751}, {30, 0.993941}}
```

und erkennen, dass jedenfalls $a = 25$ Amtsleitungen erforderlich sind, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % alle Teilnehmer, die telefonieren wollen, sofort bedienen zu können.