§12 Zufallsvariable und Verteilungen

▼

```
VariationenMitWiederholung[n_Integer, k_Integer] := Distribute[Table[Table[i, {i, 1, n}], {k}], List];
```

Bis jetzt haben wir uns mit der Frage befasst, wie man ein vorgegebenes Zufallsexperiment mathematisch beschreiben kann und dabei gesehen, dass dies durch einen geeigneten Ereignisraum Ω, mit dem die möglichen Realisierungen beschrieben werden und ein geeignetes W-Maß $\mathbb{P}$, mit dem der dieses Experiment steuernde Zufall beschrieben wird, erfolgen kann.

Häufig interessiert man sich aber nicht direkt für den Ausgang $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments. Vielmehr beobachtet man oft nur ein gewisses, von $\omega \in \Omega$ abhängiges Merkmal $Z[\omega] \in \mathbb{R}$. Dieser Wert $Z[\omega] \in \mathbb{R}$ ist aber ebensowenig vorhersehbar, wie der Ausgang $\omega \in \Omega$. Beim Beobachten eines Merkmals $Z[\omega] \in \mathbb{R}$ handelt es sich somit ebenfalls um ein Zufallsexperiment mit dem Ereignisraum $\mathbb{R}$ und einem geeignete W-Maß $\mathbb{P}_Z$ auf $\mathbb{R}$.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie man eine derartige Beobachtung eines Zufallsexperiments beschreiben kann. Wir werden in diesem Zusammenhang die Begriffe Zufallsvariable und Verteilung kennen lernen.

12.1 Der Begriff Zufallsvariable

Wir wollen in diesem Abschnitt klären, was man unter einer Zufallsvariablen versteht:

12.1.1 Definition: Unter einer Zufallsvariablen versteht man einen Mechanismus, der für das Zustandekommen von zufälligen (also nicht vollständig vorhersehbaren) Zahlen verantwortlich ist. Zufallsvariable bezeichnen wir stets mit großen Buchstaben $X, Y, Z, \ldots$ Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn dabei nur diskrete (also durch Intervalle voneinander getrennte) Zahlen erzeugt werden. Eine Zufallsvariable heißt stetig, wenn prinzipiell alle Zahlen aus einem Intervall auftreten können und keine dieser Zahlen mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt.

▼

Beispiele für diskrete Zufallsvariable sind
- Das Beobachten der Augensumme beim Würfeln mit zwei homogenen Würfeln;
- Das Feststellen der Anzahl der auftretenden Adler beim 10-maligen Werfen einer Münze;
- Das Beobachten der Anzahl der Farbwechsel beim Ziehen von verschieden gefärbten Kugeln aus einer Urne;
- Das Feststellen der Anzahl der fehlerhaften Stücke einer Stichprobe;
- Das Beobachten der Anzahl der Forderungen, die bei einer Bedienungsanlage eintreffen;
- Das Feststellen der Anzahl der in einem Zeitintervall von einer radioaktiven Substanz emittierten Teilchen;
- Das Ermitteln der Anzahl der Fehlstellen in einem Stück Stoff oder in einem Streifen Blech.

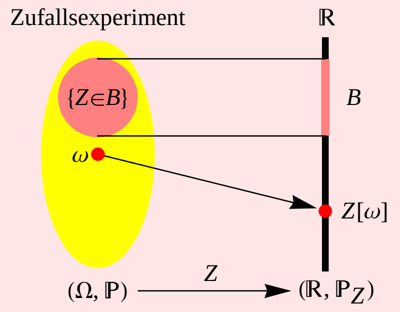
Beispiele für stetige Zufallsvariable sind
- Das Beobachten der Verweilzeit einer Forderung in einer Bedienungsanlage;
- Das Feststellen der Lebensdauer eines elektronischen Bauteils;
- Das Beobachten der Schlafdauer einer Testperson nach Einnahme eines Schlafmittels;
- Das Aufnehmen eines mit Messfehlern behafteten Messwerts.

12.1.2 Bemerkung: Die beiden *Mathematica*-Befehle RandomInteger bzw RandomReal sind Mechanismen, mit denen zufällige Zahlen aus der Menge $\{m, m+1, \ldots, n\}$ bzw aus dem Intervall $[a, b]$ erzeugt werden. Nach unserer Begriffsbildung handelt es sich bei diesen Befehlen somit um diskrete bzw stetige Zufallsvariablen.

12.1.3 Bemerkung: Dem Begriff einer Zufallsvariablen liegt die Vorstellung zu Grunde, dass die mit diesem Mechanismus erzeugten Werte $Z[\omega] \in \mathbb{R}$ dadurch entstehen, dass im Hintergrund ein mehr oder weniger komplexes Zufallsexperiment abläuft, von dessen Realisierungen $\omega \in \Omega$ nur das Merkmal $Z[\omega] \in \mathbb{R}$ beobachtet wird. Bei einer Zufallsvariablen Z handelt es sich somit um eine Abbildung $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei in vielen Fällen weder der Ereignisraum Ω noch das dieses Zufallsexperiment steuernde W-Maß $\mathbb{P}$ explizit bekannt sind.

Mit der folgenden Skizze wird diese Situation verdeutlich. Man erkennt

- Das im Hintergrund ablaufende Zufallsexperiment;
- Den Zufallsmechanismus Z, welcher jedem $\omega \in \Omega$ die "zufällige" Zahl $Z[\omega]$ zuordnet;
- Das Ereignis $\{Z \in B\} = \{\omega \in \Omega \mid Z[\omega] \in B\}$;
- Die durch das W-Maß $\mathbb{P}$ auf Ω und die Zufallsvariable Z bestimmte Verteilung $\mathbb{P}_Z$ auf $\mathbb{R}$.



12.2 Die Verteilung einer Zufallsvariablen

Vom Standpunkt der Stochastik aus ist man weniger an der Zufallsvariablen Z selbst (also an dem Mechanismus, der diese zufälligen Zahlen erzeugt) interessiert, sondern vielmehr daran, wie diese zufälligen Zahlen verteilt sind (also mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Zahlen $Z[\omega]$, welche durch diesen Mechanismus Z erzeugt werden, auftreten).

12.2.1 Definition: Unter der Verteilung der Zufallsvariablen Z versteht man eine Abbildung $\mathbb{P}_Z$, welche jeder (vernünftigen) Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}_Z[B] = \mathbb{P}[\{Z \in B\}] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega \mid Z[\omega] \in B\}]$$

zuordnet. Die Zahl $\mathbb{P}_Z[B]$ gibt somit an, mit welcher Wahrscheinlichkeit durch den Mechanismus Z ein Wert aus der Menge B erzeugt wird. Ist die Zufallsvariable Z diskret bzw stetig, so nennt man auch die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ diskret bzw stetig.

Zu dieser Definition sind einige Bemerkungen angebracht:

- Unter einer (vernünftigen) Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ versteht man eine sogenannte Borel'sche Menge, also eine Menge, die sich durch endliches oder abzählbar unendlich oftmaliges Anwenden der Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Komplement aus Intervallen erzeugen lässt. Alle in der Praxis vorkommenden Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$ sind Borel'sche Mengen.

- Um die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ der Zufallsvariable Z überhaupt definieren zu können, muss für alle (vernünftigen) Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z \in B\}]$ berechnet werden können. Das ist aber nur dann möglich, wenn das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf einer genügend großen Sigma-Algebra $\mathfrak{A}$ definiert ist - oder anders ausgedrückt - die Zufallsvariable Z die Eigenschaft besitzt, dass für alle Mengen $B \in \mathfrak{B}$ das Ereignis $\{Z \in B\}$ ein Element der Sigma-Algebra $\mathfrak{A}$ ist. Man spricht in diesem Zusammenhang davon, dass die Zufallsvariable Z messbar ist.

▪ Ist die Zufallsvariable Z stetig, so existieren nicht-Borel'sche Mengen $\Xi \subseteq \mathbb{R}$, denen prinzipiell keine sinnvolle Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_Z[\Xi]$ zugeordnet werden kann. Diese vom Standpunkt der Mathematik aus an sich interessante Tatsache ist der eigentliche Grund dafür, warum wir uns bei der Definition der Verteilung einer Zufallsvariablen auf (vernünftige) Mengen, also Borel´sche Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt haben.

▪ In der Verteilung $\mathbb{P}_Z$ der Zufallsvariablen Z steckt die gesamte Information über ihr zufälliges Verhalten. Vom Standpunkt der Stochastik aus genügt es daher, nur die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ der Zufallsvariablen Z anzugeben. Alle anderen für diese Zufallsvariable Z relevanten Größen lassen sich damit berechnen.

12.2.2 Satz: Die Verteilung einer Zufallsvariablen Z ist ein W-Maß auf $\mathbb{R}$, es gilt also

a) $\mathbb{P}_Z[\mathbb{R}] = 1$

b) für alle Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$ ist $\mathbb{P}_Z[B] \geq 0$

c) für endlich oder abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots B_n, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}_Z[B_1 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots] = \mathbb{P}_Z[B_1] + \ldots + \mathbb{P}_Z[B_n] + \ldots$$

▼

Beweis:

a) $\mathbb{P}_Z[\mathbb{R}] = \mathbb{P}[\{Z \in \mathbb{R}\}] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$

b) Für alle Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}_Z[B] = \mathbb{P}[\{Z \in B\}] \geq 0$

c) Sind die Mengen $B_1, B_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ paarweise disjunkt, so sind die Ereignisse $\{Z \in B_1\}, \{Z \in B_2\}, \ldots \subseteq \Omega$ ebenfalls paarweise disjunkt. Damit gilt wegen Definition 2.2.1

$$\mathbb{P}_Z[B_1 \cup B_2 \cup \ldots] = \mathbb{P}[\{Z \in B_1 \cup B_2 \cup \ldots\}] = \mathbb{P}[\{Z \in B_1\} \cup \{Z \in B_2\} \cup \ldots] =$$

$$= \mathbb{P}[\{Z \in B_1\}] + \mathbb{P}[\{Z \in B_2\}] + \ldots = \mathbb{P}_Z[B_1] + \mathbb{P}_Z[B_1] \ldots$$

Da man jedes W-Maß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ als Verteilung einer Zufallsvariablen auffassen kann (nämlich als Verteilung der identischen Abbildung $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf dem W-Raum $(\mathbb{R}, \mathbb{P})$), nennt man jedes W-Maß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ eine Verteilung.

Wir wollen nun die Begriffe Zufallsvariable und Verteilung an zwei einfachen Beispielen erläutern:

12.2.3 Beispiel: Das Zufallsexperiment besteht im Werfen von zwei homogenen Würfeln. Beobachtet wird die dabei gewürfelte Augensumme.
- Man gebe den Ereignisraum Ω dieses Zufallsexperiments explizit an.
- Welches W-Maß $\mathbb{P}$ beschreibt den dieses Zufallsexperiment steuernden Zufall?
- Welche Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibt diese Beobachtung?
- Wie lässt sich die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ dieser Zufallsvariablen Z möglichst bequem angeben?

▼

Lösung: a) Das Werfen von zwei homogenen Würfeln lässt sich durch den Ereignisraum

$$\Omega = \{\{x_1, x_2\} \mid x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

beschreiben, wobei die Liste $\{x_1, x_2\} \in \Omega$ der Realisierung "der erste Würfel zeigt die Augenzahl x_1 und der zweite Würfel zeigt die Augenzahl x_2" entspricht. Bei dieser Menge Ω handelt es sich übrigens um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von $k = 2$ aus $n = 6$ Dingen.

b) Da die zwei Würfel homogen sind, sind alle Ereignisse $\{x_1, x_2\} \in \Omega$ gleich wahrscheinlich. Bei unserem Zufallsexperiment handelt es sich also um ein Laplace-Experiment. Für alle $A \subseteq \Omega$ gilt daher

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{Mächtigkeit von } A}{\text{Mächtigkeit von } \Omega}$$

c) Die Beobachtung der gewürfelten Augensumme lässt sich durch die Zufallsvariable

$$Z : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mit } Z[\{x_1, x_2\}] = x_1 + x_2$$

beschreiben.

d) Da die Zufallsvariable Z offenbar nur die Werte 2, 3, …, 12 annehmen kann, handelt es sich um eine diskrete Zufallsvariable. Für alle $B \subseteq \mathbb{R}$ gilt damit

$$\mathbb{P}_Z[B] = \mathbb{P}_Z[B \cap \{2, 3, \ldots, 12\}] = \sum_{\substack{z=2 \\ z \in B}}^{12} \mathbb{P}_Z[\{z\}]$$

Die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ der Zufallsvariablen Z ist somit durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}_Z[\{z\}] = \mathbb{P}[\{Z = z\}] = \mathbb{P}[\{\{x_1, x_2\} \in \Omega \mid x_1 + x_2 = z\}]$$

mit $z = 2, 3, \ldots, 12$ vollständig bestimmt. Wir ermitteln diese Wahrscheinlichkeiten durch computerunterstütztes Abzählen:

```
n = 6; k = 2;
Ω = VariationenMitWiederholung[n, k]
f[z_] := Length[Select[Ω, #[[1]] + #[[2]] == z &]] / Length[Ω] // N
Select[Ω, #[[1]] + #[[2]] == 4 &]
data = Table[{z, f[z]}, {z, 2, 12}];
TableForm[data, TableHeadings → {None, {"z", "ℙ[{Z=z}]"}}, TableSpacing → {1, 10}]
Clear[Ω, f, data]
```

{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}, {5, 6}, {6, 1}, {6, 2}, {6, 3}, {6, 4}, {6, 5}, {6, 6}}

{{1, 3}, {2, 2}, {3, 1}}

z	ℙ[{Z=z}]
2	0.0277778
3	0.0555556
4	0.0833333
5	0.111111
6	0.138889
7	0.166667
8	0.138889
9	0.111111
10	0.0833333
11	0.0555556
12	0.0277778

12.2.4 Beispiel: Das Zufallsexperiment besteht im zufälligen Zerbrechen eines Stabes der Länge 1 in zwei Teile. Beobachtet wird die Länge des längeren Bruchstücks.

- Man gebe den Ereignisraum Ω dieses Zufallsexperiments explizit an.
- Welches W-Maß $\mathbb{P}$ beschreibt den dieses Zufallsexperiment steuernden Zufall?
- Welche Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibt diese Beobachtung?
- Wie lässt sich die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ dieser Zufallsvariablen Z möglichst bequem angeben?

▼

Lösung: a) Das Zerbrechen eines Stabes der Länge 1 in zwei Teile lässt sich durch den Ereignisraum

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \in [0, 1]\}$$

beschreiben. Die Zahl $\omega \in \Omega$ entspricht dabei der Realisierung "die Bruchstelle ist ω Einheiten vom linken Rand des Stabes entfernt".

b) Wir interpretieren das "zufällige" Zerbrechen des Stabes in der Weise, dass die Bruchstelle im Intervall [0, 1] gleich verteilt ist. Für alle Intervalle $A = [a, b] \subseteq \Omega$ gilt daher

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{Länge des Intervalls } A}{\text{Länge des Intervalls } \Omega} = b - a$$

c) Die Beobachtung der Länge des längeren Bruchstücks lässt sich durch die Zufallsvariable

$$Z : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \ Z[\omega] = \max[\omega, 1 - \omega]$$

beschreiben.

d) Da die Zufallsvariable Z offenbar nur Werte aus dem Intervall $[1/2, 1]$ annehmen kann, wobei keiner dieser Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt, ist Z eine stetige Zufallsvariable. Für alle Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$ gilt (wir stellen diese Menge B als disjunkte Vereinigung von "infinitesimalen" Intervallen der Form $[z, z + dz]$ mit $z \in B$ dar und verwenden die in Satz 12.2.2 angeführten Eigenschaften)

$$\mathbb{P}_Z[B] = \mathbb{P}_Z[\bigcup_{z \in B} [z, z + dz]] = \sum_{z \in B} \mathbb{P}_Z[[z, z + dz]]$$

Für alle Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$ ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_Z[B]$ somit durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}_Z[[z, z + dz]] = \mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz]\}] = \mathbb{P}[\{\omega \mid z \leq \max[\omega, 1 - \omega] \leq z + dz\}]$$

der infinitesimalen Intervalle $[z, z + dz]$ vollständig bestimmt. Nun gilt aber

$$\mathbb{P}[\{\omega \mid \max[\omega, 1 - \omega] \in [z, z + dz]\}] =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}[[\omega, \omega + dz] \cup [1 - \omega - dz, 1 - \omega]] = 2\,dz & \text{für } z \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\mathbb{P}_Z[B] = \sum_{z \in B} \mathbb{P}_Z[[z, z + dz]] = \sum_{z \in B} 2\, I_{[1/2, 1]}[z]\, dz = \int_B 2\, I_{[1/2, 1]}[z]\, dz$$

wobei wir mit I_A die Indikatorfunktion der Menge A bezeichnen ($I_A[x]$ ist dabei gleich 1 bzw 0, je nachdem ob $x \in A$ bzw $x \in A^c$ ist).

12.2.5 Bemerkung: Die in Punkt d) von Beispiel 12.2.4 verwendete Methode, nämlich die Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ als disjunkte Vereinigung von infinitesimalen Intervallen der Form $[z, z + dz]$ mit $z \in B$ darzustellen, dient dazu, schwierig zu beweisende Sachverhalte intuitiv und verständlich darzustellen. Die exakte mathematische Fundierung dieser Sachverhalte ist nur mit Hilfe der Maßtheorie möglich. Wir werden im Zusammenhang mit stetigen Zufallsvariablen von dieser Art der Argumentation noch oft Gebrauch machen und dabei stets von der differenziellen Denkweise reden.

Dabei auftretende Integrale interpretieren wir wenn möglich als RIEMANN-Integrale. Ist dies nicht möglich (etwa weil der Integrationsbereich nicht Vereinigung von endlich vielen Intervallen ist oder der Integrand keine stückweise stetige Funktion ist), so sind diese Integrale als LEBESGUE-Integrale zu interpretieren.

12.3 Verteilungen in *Mathematica*

In *Mathematica* sind zahlreiche Verteilungen (also W-Maße $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$) implementiert. Wir werden diese Verteilungen in den folgenden Kapiteln ausführlich besprechen und zeigen, in welchem Zusammenhang sie auftreten.

Außerdem werden wir in den folgenden Kapiteln zeigen, wie mit diesen Verteilungen gearbeitet wird.

Wichtige diskrete Verteilungen:

- DiscreteUniformDistribution[{m, n}]

Diskrete Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{m, n\}]$ auf der Menge $\{m, m+1, \ldots, n\}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m < n$.

- BinomialDistribution[n, p]

Binomialverteilung $\mathcal{B}[n, p]$ mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$.

- BernoulliDistribution[p]

Sonderfall der Binomialverteilung mit dem Parameter $n = 1$.

- NegativeBinomialDistribution[n, p]

Negative Binomialverteilung $\mathcal{NB}[n, p]$ mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$.

- GeometricDistribution[p]

Sonderfall der negativen Binomialverteilung mit dem Parameter $n = 1$.

- HypergeometricDistribution[n, n_{suc}, n_{tot}]

Hypergeometrische Verteilung $\mathcal{H}[n, n_{suc}, n_{tot}]$ mit den Parametern $n, n_{suc}, n_{tot} \in \mathbb{N}$ mit $\max[n, n_{suc}] \leq n_{tot}$.

- PoissonDistribution[λ]

Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$ mit dem Parameter $\lambda > 0$.

Wichtige stetige Verteilungen:

- UniformDistribution[{a, b}]

Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{a, b\}]$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

- TriangularDistribution[{a, b}]

Dreiecksverteilung $\mathcal{D}[\{a, b\}]$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

- ExponentialDistribution[λ]

Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$ mit dem Parameter $\lambda > 0$.

- GammaDistribution[α, λ]

Gammaverteilung $\mathcal{Gamma}[\alpha, \lambda]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$.

- LaplaceDistribution[α, λ]

Laplaceverteilung $\mathcal{L}[\alpha, \lambda]$ mit den Parametern $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$.

- BetaDistribution[α, β]

Betaverteilung $\mathcal{Beta}[\alpha, \beta]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

- NormalDistribution[μ, σ]

Normalverteilung $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

- LogNormalDistribution[μ, σ]

Logarithmische Normalverteilung $\mathcal{LN}[\mu, \sigma]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

- ChiSquareDistribution[n]

Chi-Quadrat Verteilung $\mathcal{Chi}[n]$ mit dem Parameter $n \in \mathbb{N}$.

- StudentTDistribution[n]

Student T Verteilung $\mathcal{T}[n]$ mit dem Parameter $n \in \mathbb{N}$.

- FRatioDistribution[m, n]

Fisher F Verteilung $\mathcal{F}[m, n]$ mit den Parametern $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$.

- WeibullDistribution[α, β]

Weibullverteilung $\mathcal{W}[\alpha, \beta]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

- ExtremeValueDistribution[μ, β]

Extremwertverteilung $\mathcal{E}xtrem[\mu, \beta]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$.

■ RayleighDistribution[σ]

Rayleighverteilung $\mathcal{R}[\sigma]$ mit dem Parameter $\sigma > 0$.

Jede dieser Verteilungen stellt im Rahmen von *Mathematica* ein Objekt dar, von dem sich zahlreiche für die Stochastik interessante Größen (Träger, Verteilungsdichte, Verteilungsfunktion, Erwartungswert, Streuung, Varianz, Quantil, …) ermitteln lassen.

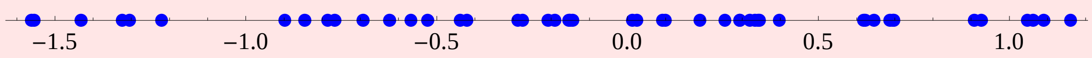
Man kann mit diesen Verteilungen aber erst dann arbeiten, wenn bekannt ist, welche Befehle in welcher Weise auf diese Objekte wirken. Wendet man beispielsweise den Befehl RandomInteger bzw den Befehl RandomReal auf eine dieser in *Mathematica* implementierten diskreten bzw stetigen Verteilungen an, so werden Pseudozufallszahlen erzeugt, welche nach diesem Verteilungsgesetz verteilt sind:

12.3.1 Beispiel: Man veranschauliche n mit den Parametern μ und σ normalverteilte Pseudozufallszahlen als Punkte auf der Zahlengeraden.

▼

Lösung: Wir erzeugen mit Hilfe von RandomReal und Distribute n Punkte, deren x-Koordinaten mit den Parametern μ und σ normalverteilte Pseudozufallszahlen sind und veranschaulichen diese Punkte mit Hilfe von ListPlot:

```
n = 50; μ = 0; σ = 1;
data = Distribute[List[RandomReal[NormalDistribution[μ, σ], n], {0}], List];
ListPlot[data, PlotStyle → {PointSize[0.01], Blue}, AspectRatio → 0.05, PlotRange → All, Axes → {True, None}]
Clear[n, μ, σ, data]
```



Interessant bei Verteilungen (also W-Maßen $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$) ist die Frage, auf welchen Teilmengen sie konzentriert sind. Wir definieren in diesem Zusammenhang

12.3.2 Definition: Unter dem Träger der Verteilung $\mathbb{P}$ versteht man die kleinste abgeschlossene Teilmenge $\mathbb{T}_{\mathbb{P}} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\mathbb{P}[\mathbb{T}_{\mathbb{P}}] = 1$. Bei diskreten Zufallsvariablen Z ist der Träger $\mathbb{T}_Z$ der Verteilung $\mathbb{P}_Z$ eine endliche oder höchstens abzählbare Menge; er hat in den meisten Fällen die Form $\{m, m+1, \ldots, n\}$ bzw $\{m, m+1, \ldots\}$. Bei stetigen Zufallsvariablen Z ist der Träger $\mathbb{T}_Z$ der Verteilung $\mathbb{P}_Z$ meistens ein Intervall der Form $[a, b]$ bzw $[0, \infty[$ bzw $\mathbb{R}$.

▼

Natürlich existiert auch der Begriff des Trägers $\mathbb{T}_Z$ einer $\mathbb{E}$-wertigen Zufallsvariablen Z. Es handelt sich dabei um die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{E}$ mit der Eigenschaft $\mathbb{P}_Z[\mathbb{T}_Z] = 1$. (Diese Begriffsbildung setzt voraus, dass auf der Menge $\mathbb{E}$ eine Topologie existiert. Handelt es sich bei der Menge $\mathbb{E}$ um eine endliche Menge, so verwendet man in naheliegender Weise die diskrete Topologie.)

Mit DistributionDomain lässt sich der Träger von in *Mathematica* implementierten Verteilungen ermitteln:

■ DistributionDomain[*distribution*]

Ermittelt von der in *Mathematica* implementierten Verteilung *distribution* den Träger. Ist die Verteilung diskret, so wird ihr Träger in der Form Range[m, n] ausgegeben; ist die Verteilung stetig, so wird ihr Träger in der Form Interval[{a, b}] ausgegeben.

12.3.3 Beispiel: Man ermittle die Träger der wichtigsten, in *Mathematica* implementierten Verteilungen.

▼

Lösung: Unter Verwendung des Befehls DistributionDomain erhält man:

```
DistributionDomain[DiscreteUniformDistribution[{m, n}]]
Range[m, n]
DistributionDomain[BinomialDistribution[n, p]]
Range[0, n]
DistributionDomain[NegativeBinomialDistribution[n, p]]
Range[0, ∞]
DistributionDomain[HypergeometricDistribution[n, nsuc, ntot]]
Range[Max[0, n + nsuc - ntot], Min[n, nsuc]]
DistributionDomain[PoissonDistribution[λ]]
Range[0, ∞]
DistributionDomain[UniformDistribution[{a, b}]]
Interval[{a, b}]
DistributionDomain[TriangularDistribution[{a, b}]]
Interval[{a, b}]
DistributionDomain[ExponentialDistribution[λ]]
Interval[{0, ∞}]
DistributionDomain[GammaDistribution[α, β]]
Interval[{0, ∞}]
DistributionDomain[LaplaceDistribution[α, λ]]
Interval[{-∞, ∞}]
DistributionDomain[BetaDistribution[α, β]]
Interval[{0, 1}]
```

DistributionDomain[NormalDistribution[μ, σ]]

```
Interval[{-∞, ∞}]
```

DistributionDomain[LogNormalDistribution[μ, σ]]

```
Interval[{0, ∞}]
```

DistributionDomain[ChiSquareDistribution[n]]

```
Interval[{0, ∞}]
```

DistributionDomain[StudentTDistribution[n]]

```
Interval[{-∞, ∞}]
```

DistributionDomain[FRatioDistribution[m, n]]

```
Interval[{0, ∞}]
```

DistributionDomain[WeibullDistribution[α, β]]

```
Interval[{0, ∞}]
```

DistributionDomain[ExtremeValueDistribution[μ, β]]

```
Interval[{-∞, ∞}]
```

DistributionDomain[RayleighDistribution[σ]]

```
Interval[{0, ∞}]
```

Wir beschließen dieses Kapitel mit einer häufig verwendeten Schreibweise:

12.3.4 Schreibweise: Soll ausgedrückt werden, dass die Zufallsvariable Z eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallvariable ist, so schreibt man statt $\mathbb{P}_Z = \mathcal{B}[n, p]$ einfach $Z \approx \mathcal{B}[n, p]$. Analog dazu sind auch die Schreibweisen $Z \approx \mathcal{N}[\mu, \sigma]$, $Z \approx \mathcal{P}[\alpha]$, … zu verstehen.