§15 Verteilungsfunktionen

▼

```
EmpiricalCDF[daten_, z_] := Module[{n},
   n = Length[daten];
   Length[Select[daten, # ≤ z &]] / n // N]
```

In den Kapiteln 13 und 14 haben wir gesehen, dass eine diskrete bzw stetige Verteilung $\mathbb{P}$ durch ihre Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ vollständig bestimmt ist. Eine andere, ebenso effiziente Methode, eine Verteilung $\mathbb{P}$ anzugeben, besteht in der Angabe ihrer Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$. Eine Unterscheidung in diskrete bzw stetige Verteilungen ist dabei nicht notwendig. Außerdem lassen sich mit Verteilungsfunktionen auch gemischte Verteilungen beschreiben.

15.1 Der Begriff Verteilungsfunktion

Ohne auf den Beweis näher eingehen zu können, erwähnen wir den für Verteilungen zentralen Satz

15.1.1 Satz: Ist $\mathbb{P}$ eine Verteilung, also ein W-Maß auf $\mathbb{R}$, so gilt für alle Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[B] = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[]\, a_i, b_i]] \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]\, a_i, b_i]\}$$

wobei das Infimum über alle möglichen Überdeckungen der Menge B durch abzählbar viele Intervalle der Form $]\, a_i, b_i]$ zu bilden ist. Die Verteilung $\mathbb{P}$ ist somit durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[]\, a, b]]$ von Intervallen der Form $]\, a, b]$ bereits vollständig bestimmt.

Nun lässt sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[]\, a, b]]$ des Intervalls $]\, a, b]$ aber wegen

$$\mathbb{P}[]\, a, b]] = \mathbb{P}[] - \infty, b]] - \mathbb{P}[] - \infty, a]]$$

durch die Wahrscheinlichkeiten der beiden Intervalle $] - \infty, b]$ und $] - \infty, a]$ ausdrücken. Die Verteilung $\mathbb{P}$ ist daher bereits durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[] - \infty, z]]$ von Intervallen der Form $] - \infty, z]$ vollständig bestimmt.

Wir nehmen diesen Satz zum Anlass und definieren

15.1.2 Definition: Unter der Verteilungsfunktion (im Englischen Cumulative Distribution Function oder kurz CDF genannt) $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ einer Verteilung $\mathbb{P}$ versteht man die Abbildung

$$\mathbb{F}_{\mathbb{P}} : \mathbb{R} \to [0, 1] \quad \text{mit} \quad \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z] = \mathbb{P}[] - \infty, z]]$$

Wegen Satz 15.1.1 ist die Verteilung $\mathbb{P}$ durch ihre Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ vollständig bestimmt.

▼

Wir haben nicht vorausgesetzt, dass die Verteilung $\mathbb{P}$ diskret bzw stetig sein muss. Der Begriff der Verteilungsfunktion macht nämlich auch dann Sinn, wenn die Verteilung $\mathbb{P}$ weder diskret noch stetig ist. Für praktische Anwendungen ist dies insbesondere dann von Interesse, wenn es sich bei der Verteilung $\mathbb{P}$ um eine Verteilung mit diskreten und stetigen Anteilen (man spricht dabei von einer gemischten Verteilung) handelt.

15.1.3 Bemerkung:

a) Ist $\mathbb{P}$ eine diskrete Verteilung mit Träger $\mathbb{T}_{\mathbb{P}}$ und Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$, so gilt für alle $z \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z] = \mathbb{P}[] - \infty, z]] = \sum_{\substack{x \in \mathbb{T}_{\mathbb{P}} \\ x \le z}} \mathbb{P}[\{x\}] = \sum_{\substack{x \in \mathbb{T}_{\mathbb{P}} \\ x \le z}} \mathbb{f}_{\mathbb{P}}[x]$$

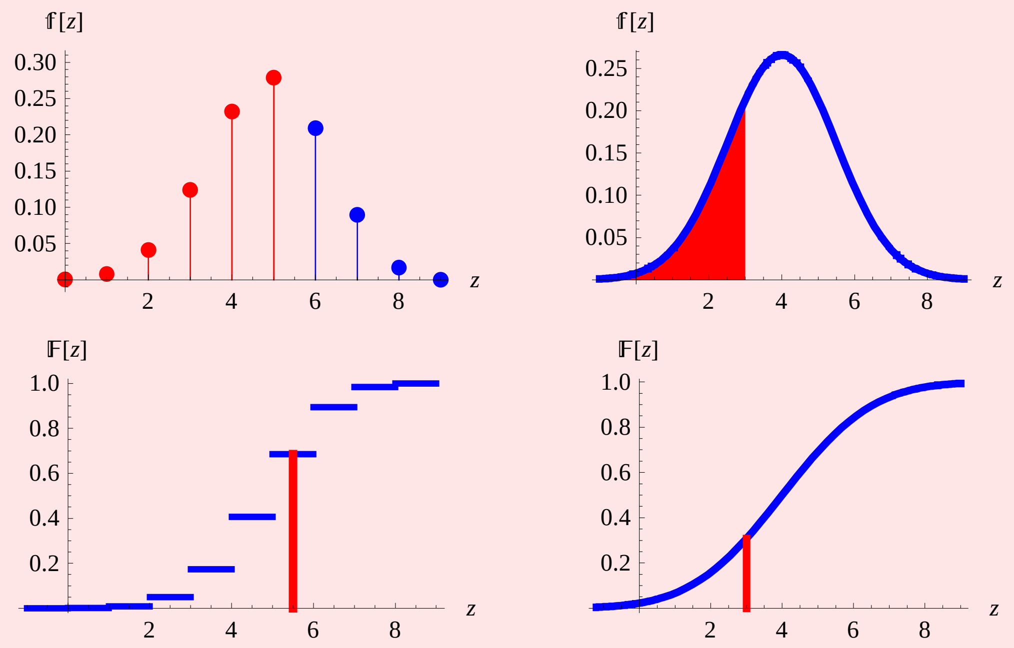
Die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ einer diskreten Verteilung $\mathbb{P}$ ist damit eine Stufenfunktion mit den Sprungstellen $z \in \mathbb{T}_{\mathbb{P}}$ und den Sprunghöhen $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z]$.

b) Ist $\mathbb{P}$ eine stetige Verteilung mit der Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$, so gilt für alle $z \in \mathbb{R}$ (differenzielle Denkweise)

$$\mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z] = \mathbb{P}[]-\infty, z]] = \int_{-\infty}^{z} \mathbb{P}[[x, x + dx]] = \int_{-\infty}^{z} \mathbb{f}_{\mathbb{P}}[x]\, dx$$

Die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ ist damit eine stetige und stückweise differenzierbare Funktion mit der Ableitung $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$.

Wir veranschaulichen diese Tatsache graphisch: Die folgende Zeichnung zeigt die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ (oben) sowie die zugehörige Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ (unten) einer diskreten bzw einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$. Bei einer diskreten Verteilung entspricht die Summe der roten Balken der oberen Zeichnung dem roten Balken der unteren Zeichnung; bei einer stetigen Verteilung entspricht die rot eingezeichnete Fläche der oberen Zeichnung dem roten Balken der unteren Zeichnung.



15.1.4 Bemerkung: Ist $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ die Verteilungsfunktion einer Verteilung $\mathbb{P}$, so gilt
a) $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ ist monoton nicht abnehmend, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}[x] \leq \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[y]$;
b) $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ ist rechtsseitig stetig, d.h. für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \downarrow z} \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[x] = \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z]$;
c) $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ ist normiert, d.h. $\lim_{z \to -\infty} \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z] = 0$ und $\lim_{z \to \infty} \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z] = 1$.

▼

Beweis: a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt wegen Satz 2.2.2

$$\mathbb{F}_{\mathbb{P}}[x] = \mathbb{P}[]-\infty, x]] \leq \mathbb{P}[]-\infty, y]] = \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[y]$$

b) Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt wegen a) und der Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\lim_{x \downarrow z} \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[x] = \lim_{x \downarrow z} \mathbb{P}[]-\infty, x]] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[]-\infty, z + \frac{1}{n}]] = \mathbb{P}[\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty, z + \frac{1}{n}]] = \mathbb{P}[]-\infty, z]] = \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z]$$

c) Ebenfalls wegen a) und der Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen gilt

$$\lim_{z \to -\infty} \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z] = \lim_{z \to -\infty} \mathbb{P}[]-\infty, z]] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[]-\infty, -n]] = \mathbb{P}[\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty, -n]] = \mathbb{P}[\{\,\}] = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z] = \lim_{z\to\infty} \mathbb{P}[]-\infty, z]] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[]-\infty, n]] = \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty}]-\infty, n]] = \mathbb{P}[\mathbb{R}] = 1$$

Diese drei Eigenschaften sind charakteristisch in dem Sinn, dass jede Funktion $\mathbb{F}:\mathbb{R}\to[0,1]$ mit diesen Eigenschaften als Verteilungsfunktion einer Verteilung $\mathbb{P}$ aufgefasst werden kann. Man nennt diese drei Eigenschaften daher die charakteristischen Eigenschaften einer Verteilungsfunktion.

Für das Rechnen mit Verteilungen ist die folgende Bemerkung von Bedeutung (wir verwenden dabei die Schreibweise $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z^-] = \lim_{x\uparrow z} \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[x]$ für den linksseitigen Grenzwert der Funktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ an der Stelle z):

15.1.5 Bemerkung: Sei $\mathbb{P}$ eine Verteilung mit der Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$.

a) Für alle $c\in\mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}[\{c\}] = \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[c] - \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[c^-]$$

Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{c\}]$ der einelementigen Menge $\{c\}$ ist somit gleich der Sprunghöhe der Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ an der Stelle c. Ist die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ der Verteilung $\mathbb{P}$ stetig, so besitzen alle einelementigen Mengen (und damit auch alle Mengen mit abzählbar vielen Elementen) die Wahrscheinlichkeit 0.

b) Für alle $a, b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ gilt

$$\mathbb{P}[]a, b]] = \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[b] - \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[a] \qquad \mathbb{P}[[a, b]] = \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[b] - \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[a^-]$$

$$\mathbb{P}[[a, b[] = \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[b^-] - \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[a^-] \qquad \mathbb{P}[]a, b[] = \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[b^-] - \mathbb{F}_{\mathbb{P}}[a]$$

▼

15.2 Verteilungsfunktionen in *Mathematica*

Mit dem folgenden Befehl lassen sich die Verteilungsfunktionen $\mathbb{F}$ von in *Mathematica* implementierten Verteilungen (numerisch und formelmäßig) auswerten:

■ CDF[*distribution*, *z*]

wertet die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}$ der Verteilung *distribution* an der Stelle *z* (sowohl numerisch als auch formelmäßig) aus. Die Verteilungsfunktionen sowohl von diskreten als auch von stetigen Verteilungen lassen sich mit dem Befehl Plot zeichnen.

Einige dieser Verteilungsfunktionen verwenden dabei die regularisierte Gamma-Funktion, die regularisierte Beta-Funktion sowie die Gauß'sche Fehlerfunktion (diese Funktionen werden in *Mathematica* mit den Befehlen GammaRegularized bzw BetaRegularized bzw Erf aufgerufen) zur geschlossenen Darstellung von Summen und Integralen. Ohne auf ihre Eigenschaften im Detail einzugehen, definieren wir:

15.2.1 Definition:

a) Unter der regularisierten Gamma-Funktion versteht man die Abbildung

$$\Gamma_r :]0,\infty[\times[0,\infty[\times[0,\infty[\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Gamma_r[\alpha, x, y] = \frac{1}{\Gamma[\alpha]}\int_x^y t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

b) Unter der regularisierten Beta-Funktion versteht man die Abbildung

$$B_r : [0,1]\times[0,1]\times]0,\infty[\times]0,\infty[\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad B_r[x, y, \alpha, \beta] = \frac{1}{B[\alpha,\beta]}\int_x^y t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$$

c) Unter der Gauß'schen Fehlerfunktion versteht man die Abbildung

$$\text{Erf} : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \text{Erf}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\, dt$$

▼

Man verwendet oft die Abkürzungen $\Gamma_r[\alpha, z] = 1 - \Gamma_r[\alpha, 0, z]$ und $B_r[z, \alpha, \beta] = B_r[0, z, \alpha, \beta]$.

Wir wollen nun die Verteilungsfunktionen $\mathbb{F}$ der wichtigsten in *Mathematica* implementierten Verteilungen analysieren. Unser Ziel besteht dabei wieder darin, diese Verteilungsfunktionen formelmäßig explizit anzugeben und mit Hilfe von Plot und Manipulate auf dynamische Weise graphisch darzustellen.

15.2.2 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der diskreten Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{m, n\}]$ mit den Parametern $m < n \in \mathbb{Z}$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.3 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung $\mathcal{B}[n, p]$ mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq p \leq 1$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.4 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der negativen Binomialverteilung $\mathcal{NB}[n, p]$ mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq p \leq 1$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.5 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$ mit dem Parameter $\lambda > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.6 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{a, b\}]$ auf dem Intervall $[a, b]$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.7 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Dreiecksverteilung $\mathcal{D}[\{a, b\}]$ auf dem Intervall $[a, b]$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.8 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$ mit dem Parameter $\lambda > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.9 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Gammaverteilung $\mathcal{G}amma[\alpha, \lambda]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.10 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Laplaceverteilung $\mathcal{L}[\alpha, \lambda]$ mit den Parametern $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.11 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Betaverteilung $\mathcal{B}eta[\alpha, \beta]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.12 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.13 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der logarithmischen Normalverteilung $\mathcal{LN}[\mu,\sigma]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.14 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat Verteilung $\mathcal{C}hi[n]$ mit dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.15 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Student T Verteilung $\mathcal{T}[n]$ mit dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.16 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Fisher F Verteilung $\mathcal{F}[m, n]$ mit den Parametern $m, n \in \mathbb{N}$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.17 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Weibullverteilung $\mathcal{W}[\alpha, \beta]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.18 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Extremwertverteilung $\mathcal{E}xtrem[\mu, \beta]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.2.19 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsfunktion der Rayleighverteilung $\mathcal{R}[\sigma]$ mit dem Parameter $\sigma > 0$ und zeichne diese Verteilungsfunktion.

▼

15.3 Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen

Bisher haben wir uns nur mit den Verteilungsfunktionen $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ von Verteilungen $\mathbb{P}$ beschäftigt. In diesem Abschnitt befassen wir uns mit den Verteilungsfunktionen $\mathbb{F}_Z$ von Zufallsvariablen Z.

15.3.1 Definition: Unter der Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ einer Zufallsvariablen Z versteht man die Verteilungsfunktion der Verteilung $\mathbb{P}_Z$ von Z, also die Abbildung

$$\mathbb{F}_Z : \mathbb{R} \to [0, 1] \text{ mit } \mathbb{F}_Z[z] = \mathbb{P}[\{Z \le z\}]$$

Wegen Bemerkung 15.1.3 ist die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ der Zufallsvariablen Z durch ihre Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ bereits vollständig bestimmt.

An Hand von einigen Beispielen werden wir nun zeigen, wie sich die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ einer Zufallsvariablen Z ermitteln lässt, wobei wir uns zunächst nochmals mit den bereits in den Abschnitten 13.3 und 14.3 behandelten Zufallsvariablen, deren Verteilungsdichten wir bereits ermittelt haben, befassen werden. Wir werden die auf diese Weise ermittelten Verteilungsfunktionen jeweils *Mathematica*-gerecht aufbereiten und zeichnen.

15.3.2 Beispiel: Unser Zufallsexperiment besteht im Werfen von zwei homogenen Würfeln. Mit der Zufallsvariablen Z wird die dabei auftretenden Augensumme bezeichnet. Man analysiere die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ von Z.

▼

Lösung: In Beispiel 13.3.3 haben wir die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z[z]$ der Zufallsvariablen Z bereits ermittelt

$$\mathbb{f}_Z[z] = \mathbb{P}[\{Z = z\}] = \begin{cases} (z-1)/6^2 & \text{für } z \in \{2, 3, \ldots, 7\} \\ (13-z)/6^2 & \text{für } z \in \{8, 9, \ldots, 12\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und *Mathematica*-gerecht aufbereitet:

```
fd1[z_] := 0 /; Or[z < 2, z > 12, NumberQ[z] && Not[IntegerQ[z]]]
fd1[z_] := (z − 1) / 6^2 /; 2 ≤ z ≤ 7;
fd1[z_] := (13 − z) / 6^2 /; 8 ≤ z ≤ 12;
```

Wegen Bemerkung 15.1.3

```
FullSimplify[Sum[fd1[i], {i, 2, z}]]
FullSimplify[Sum[(i − 1) / 6^2, {i, 2, z}]]
FullSimplify[Sum[(13 − i) / 6^2, {i, 8, z}]]
```

$$\sum_{i=2}^{z} \mathrm{fd1}[i]$$

$$\frac{1}{72}(-1+z)\,z$$

$$-\frac{1}{72}(-18+z)(-7+z)$$

besitzt diese Zufallsvariable Z damit die Verteilungsfunktion

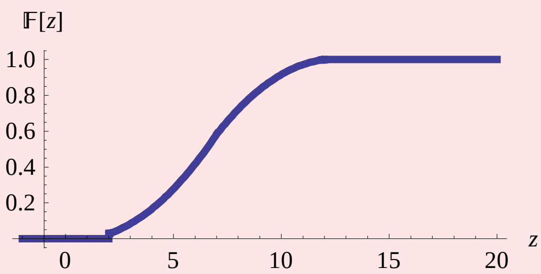
$$\mathbb{F}_Z[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < k \\ \sum_{i=2}^{\lfloor z \rfloor} \mathbb{f}_Z[i] = \frac{z(z-1)}{72} & \text{für } 2 \le z < 7 \\ \sum_{i=2}^{\lfloor z \rfloor} \mathbb{f}_Z[i] = \frac{1}{72}\,(42 + (18-z)(z-7)) & \text{für } 7 \le z < 12 \\ 1 & \text{für } z \ge 12 \end{cases}$$

Diese Verteilungsfunktion lässt sich mittels Piecewise mühelos in *Mathematica* eingeben

```
Fd1[z_] := Piecewise[{{z (z − 1)/72, 2 ≤ z < 7}, {1/72 (42 + (18 − z) (z − 7)), 7 ≤ z < 12}, {1, z ≥ 12}}]
```

und für beliebige Werte von k und n auf dynamische Weise graphisch darstellen:

```
Plot[Fd1[z], {z, −2, 20}, PlotPoints → 200,
  AspectRatio → 0.4, PlotStyle → Thickness[0.015], AxesOrigin → {−1, 0}, PlotRange → All,
  AxesLabel → {"z", "𝔽[z]"}, ImageSize → {200, 100}]
```



15.3.3 Beispiel: Durch einen Kanal werden n unabhängige Kodeworte übertragen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kodewort richtig empfangen wird, ist 0.9. Mit der Zufallsvariablen Z wird die Anzahl der Kodeworten, die richtig empfangen wurden, bezeichnet. Man analysiere die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ von Z. Man analysiere die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ von Z.

▼

Lösung: In Beispiel 13.3.5 haben wir die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z[z]$, $z \in \mathbb{T}_Z = \{1, 2, \ldots, n\}$ der Zufallsvariablen Z bereits ermittelt

$$\mathbb{f}_Z[z] = \mathbb{P}[\{Z = z\}] = \begin{cases} \binom{n}{z} 0.9^z \, 0.1^{n-z} & \text{für } z \in \mathbb{T}_Z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und *Mathematica*-gerecht aufbereitet:

```
fd1[z_, n_, p_] := 0 /; Or[z < 1, z > n, NumberQ[z] && Not[IntegerQ[z]]]
fd1[z_, n_, p_] := Binomial[n, z] p^z (1 - p)^(n - z)
```

Wegen Bemerkung 15.1.3

besitzt diese Zufallsvariable Z damit die Verteilungsfunktion

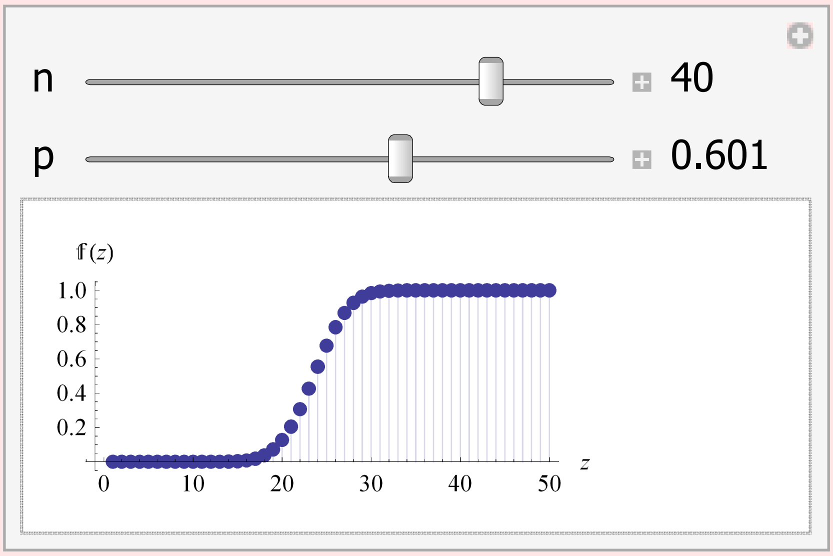
$$\mathbb{F}_Z[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < k \\ \sum_{i=1}^{\lfloor z \rfloor} \mathbb{f}_Z[i] = (1-p)^n \sum_{i=1}^{\lfloor z \rfloor} \binom{n}{i} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i & \text{für } 1 \leq z < n \\ 1 & \text{für } z \geq n \end{cases}$$

Diese Verteilungsfunktion lässt sich mittels Piecewise mühelos in *Mathematica* eingeben

```
Fd1[z_, n_, p_] := Piecewise[{{(1 - p)^n Sum[Binomial[n, i] (p/(1 - p))^i, {i, 1, z}], 1 ≤ z < n}, {1, z ≥ n}}]
```

und für beliebige Werte von k und n auf dynamische Weise graphisch darstellen:

```
Manipulate[ListPlot[Table[{z, Fd1[z, n, p]}, {z, 1, 50}],
   PlotStyle → PointSize[0.03], Filling → Axis, AspectRatio → 0.4, AxesOrigin → {-1, 0}, PlotRange → All,
   AxesLabel → {z, f[z]}, ImageSize → {200, 100}],
  {n, 1, 50, 1, Appearance → "Labeled"}, {p, 0, 0.99, Appearance → "Labeled"}]
```



Nach diesen Beispielen über Verteilungsfunktionen von diskreten Zufallsvariablen befassen wir uns nun mit Beispielen über Verteilungsfunktionen von stetigen Zufallsvariablen.

15.3.4 Beispiel: Aus dem Intervall $[0, 1]$ werden zufällig n Zahlen ausgewählt und ihr Minimum Z beobachtet. Man analysiere die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ von Z.

▼

Lösung: In Beispiel 14.3.2 haben wir die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ dieser Zufallsvariablen Z bereits ermittelt

$$\mathbb{f}_Z[z] = \begin{cases} n\,(1-z)^{n-1} & \text{für } 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und *Mathematica*-gerecht aufbereitet:

```
fs1[z_, n_] := Piecewise[{{n (1 - z)^(n-1), 0 ≤ z ≤ 1}}]
```

Wegen Bemerkung 15.1.3 und

```
Fs1[z_, n_] := Evaluate[Integrate[fs1[z, n], z]]; Fs1[z, n]
```

$$\begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-(1-z)^n & 0 < z \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(das Integral muss zuerst mit Hilfe von Evaluate ausgewertet werden, bevor damit weitere Berechnungen angestellt werden können) gilt damit

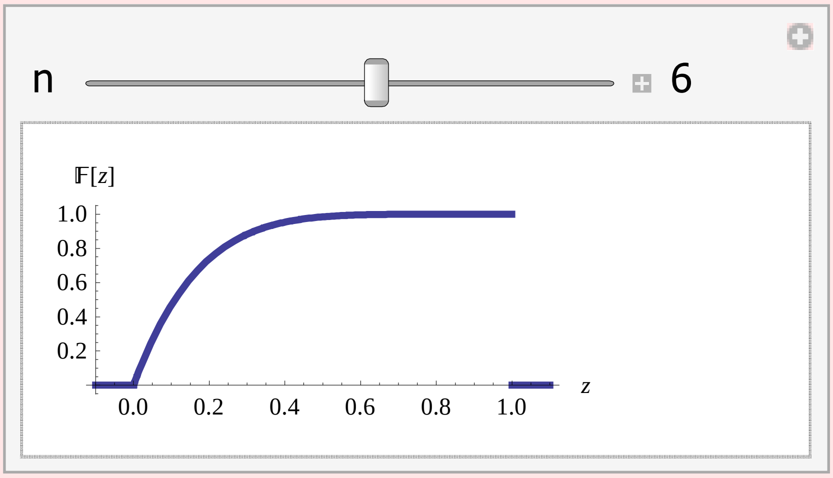
$$\mathbb{F}_Z[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \int_0^z \mathbb{f}_Z[x]\,dx = 1-(1-z)^n & \text{für } 0 \le z < 1 \\ 1 & \text{für } z \ge 1 \end{cases}$$

Man hätte diese Verteilungsfunktion natürlich auch direkt berechnen können. Für alle $0 \le z < 1$ gilt nämlich

$$\mathbb{F}_Z[z] = \mathbb{P}[\{Z \le z\}] = 1 - \mathbb{P}[\{Z > z\}] = 1 - \mathbb{P}[\{\text{alle } n \text{ Punkte liegen rechts von } z\}] = 1-(1-z)^n$$

Diese Verteilungsfunktion lässt sich nun für beliebige Werte von n auf dynamische Weise graphisch darstellen:

```
Manipulate[Plot[Fs1[z, n], {z, -0.1, 1.1}, AspectRatio → 0.4, PlotStyle → Thickness[0.015],
   AxesOrigin → {-0.1, 0}, PlotRange → All, AxesLabel → {"z", "𝔽[z]"}, ImageSize → {200, 100}],
 {n, 1, 10, 1, Appearance → "Labeled"}]
```



15.3.5 Beispiel: Ein Punkt wird zufällig in den ersten Quadrant des Einheitskreises geworfen und seine x-Koordinate Z bestimmt. Man ermittle die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ von Z.

▼

Lösung: In Beispiel 14.3.3 haben wir die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ dieser Zufallsvariablen Z bereits ermittelt

$$\mathbb{f}_Z[z] = \frac{1}{dz}\,\mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz]\}] = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-z^2} & \text{für } 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und *Mathematica*-gerecht aufbereitet:

```
fs2[z_] := Piecewise[{{4 Sqrt[1 − z^2]/π, 0 ≤ z ≤ 1}}]
```

Wegen Bemerkung 15.1.3 und

```
Fs2[z_] := Evaluate[Integrate[fs2[z], z]]; Fs2[z]
```

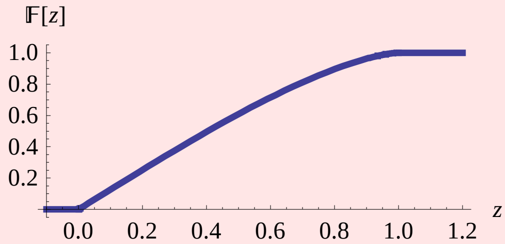
$$\begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{2\left(z\sqrt{1-z^2}+\text{ArcSin}[z]\right)}{\pi} & 0 < z \le 1 \\ 1 & \text{True} \end{cases}$$

gilt damit

$$\mathbb{F}_Z[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \int_0^z \mathbb{f}_Z[x]\,dx = \frac{2}{\pi}\left(z\sqrt{1-z^2} + \text{ArcSin}[z]\right) & \text{für } 0 \le z < 1 \\ 1 & \text{für } z \ge 1 \end{cases}$$

Diese Verteilungsfunktion lässt sich natürlich mühelos zeichnen:

```
Plot[Fs2[z], {z, −0.1, 1.2}, PlotStyle → Thickness[0.015], AspectRatio → 0.4, AxesOrigin → {−0.1, 0},
  PlotRange → All, AxesLabel → {"z", "𝔽[z]"}]
```



15.3.6 Beispiel: Auf der unteren und der linken Seitenkante eines Quadrats der Seitenlänge 1 werden willkürlich zwei Punkte P und Q ausgewählt. Man ermittle die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ ihres Abstandes Z.

▼

Lösung: In Beispiel 14.3.4 haben wir die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z[z]$ dieser Zufallsvariablen Z bereits ermittelt

$$\mathbb{f}_Z[z] = \begin{cases} z\,\pi/2 & \text{für } 0 \le z < 1 \\ z\,\pi/2 - 2\,z\,\text{ArcTan}\left[\sqrt{z^2-1}\,\right] & \text{für } 1 \le z \le \sqrt{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und *Mathematica*-gerecht aufgereitet:

```
fs3[z_] := Piecewise[{{z π/2, 0 ≤ z ≤ 1}, {z π/2 − 2 z ArcTan[Sqrt[z^2 − 1]], 1 ≤ z ≤ Sqrt[2]}}]
```

Wegen Bemerkung 15.1.3 und

```
Fs3[z_] := Evaluate[Integrate[fs3[z], z]]; Fs3[z]
```

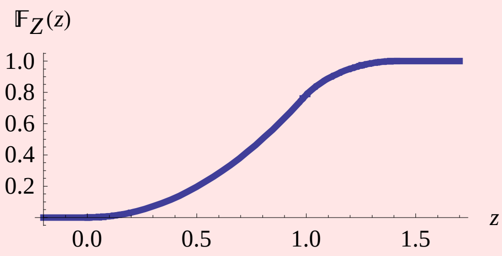
$$\begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{\pi z^2}{4} & 0 < z \le 1 \\ \frac{\pi z^2}{4} + \sqrt{-1+z^2} - z^2 \,\text{ArcTan}\left[\sqrt{-1+z^2}\right] & 1 < z \le \sqrt{2} \\ 1 & \text{True} \end{cases}$$

gilt damit

$$\mathbb{F}_Z[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \int_0^z \mathbb{f}_Z[x]\, dx = z^2\, \pi/4 & \text{für } 0 \le z < 1 \\ \int_0^z \mathbb{f}_Z[x]\, dx = z^2\, \pi/4 + (\sqrt{z^2-1} - z^2\, \text{ArcTan}[\sqrt{z^2-1}\,]) & \text{für } 1 \le z < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } z \ge \sqrt{2} \end{cases}$$

Diese Verteilungsfunktion lässt sich wieder mühelos zeichnen:

```
Plot[Fs3[z], {z, −0.2, 1.7}, PlotStyle → Thickness[0.015], AspectRatio → 0.4, AxesOrigin → {−0.2, 0},
  PlotRange → All, AxesLabel → {z, 𝔽Z[z]}]
```



15.3.7 Beispiel: n Punkte werden zufällig in den Einheitskreis geworfen und der Abstand Z vom Mittelpunkt des Einheitskreises zum nächst gelegenen dieser n Punkte beobachtet. Man ermittle die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ von Z.

▼

Lösung: In Beispiel 14.3.5 haben wir die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z[z]$ dieser Zufallsvariablen Z bereits ermittelt

$$\mathbb{f}_Z[z] = \begin{cases} 2\, n\, z\, (1-z^2)^{n-1} & \text{für } 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und *Mathematica*-gerecht aufbereitet:

```
fs4[z_, n_] := Piecewise[{{2 n z (1 − z^2)^(n−1), 0 ≤ z ≤ 1}}]
```

Wegen Bemerkung 15.1.3 und

```
Fs4[z_, n_] := Evaluate[Integrate[fs4[z, n], z]]; Fs4[z, n]
```

$$\begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 - \left(1-z^2\right)^n & 0 < z \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

gilt damit

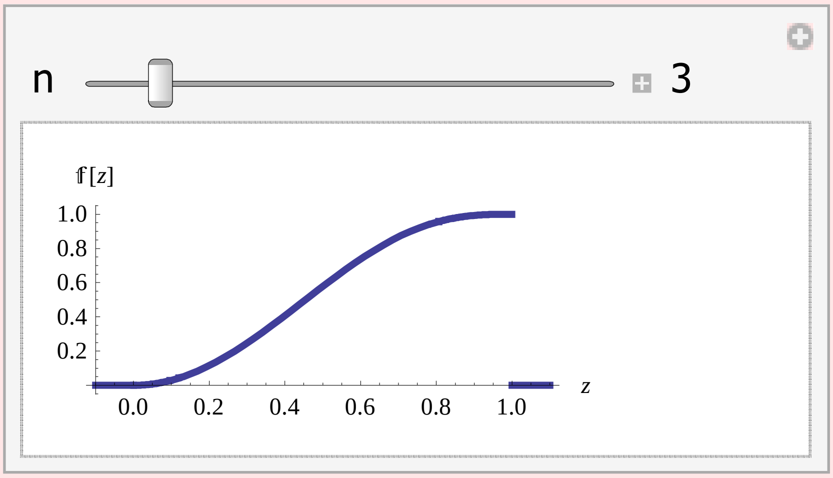
$$\mathbb{F}_Z[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \int_0^z \mathbb{f}_Z[x]\, dx = 1 - (1 - z^2)^n & \text{für } 0 \le z < 1 \\ 1 & \text{für } z \ge 1 \end{cases}$$

Man hätte diese Verteilungsfunktion auch wieder direkt berechnen können. Für alle $0 \le z < 1$ gilt nämlich

$$\mathbb{F}_Z[z] = \mathbb{P}[\{Z \le z\}] = 1 - \mathbb{P}[\{Z > z\}] = 1 - \mathbb{P}[\left\{ \begin{matrix} \text{alle } n \text{ Punkte liegen nicht im Kreis} \\ \text{mit Mittelpunkt } \{0,\ 0\} \text{ und Radius } z \end{matrix} \right\}] = 1 - (1 - z^2)^n$$

Diese Verteilungsfunktion lässt sich wieder für beliebige Werte von n auf dynamische Weise graphisch darstellen:

```
Manipulate[Plot[Fs4[z, n], {z, −0.1, 1.1},
    PlotStyle → Thickness[0.015], AspectRatio → 0.4, AxesOrigin → {−0.1, 0}, PlotRange → All,
    AxesLabel → {"z", "𝕗[z]"}, ImageSize → {200, 100}],
  {n, 1, 20, 1, Appearance → "Labeled"}]
```



15.3.8 Beispiel: Der Punkt P sei auf der Oberfläche der Einheitskugel gleichverteilt. Man ermittle die Verteilungsfunktion des Winkels Θ, den der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ zum Punkt P mit der z-Achse einschließt.

▼

In manchen Fällen kann es sinnvoll sein, die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen durch Simulation näherungsweise zu ermitteln. Man erzeugt dazu eine genügend große Anzahl (vergleiche dazu unsere Faustregel) von Realisierungen dieser Zufallsvariablen Z und ermittelt von diesem Datenmaterial daten unter Verwendung des Befehls EmpiricalCDF die empirische Verteilungsfunktion. Für alle $z \in \mathbb{R}$ stellt die empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{\mathbb{F}}_Z[z] = \text{relative Häufigkeit des Intervalls }]-\infty,\ z] \text{ im Datenmaterial daten}$$

eine gute Näherung für die gesuchte Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Z an der Stelle z dar. Man beachte wieder, dass sich die auf diese Weise ermittelte empirische Verteilungsfunktion von Simulationslauf zu Simulationslauf geringfügig ändern wird.

■ EmpiricalCDF[*daten*, *z*]

ordnet jedem $z \in \mathbb{R}$ die relative Häufigkeit des Intervalls $]-\infty,\ z]$ im Datenmaterial daten zu.

15.3.9 Beispiel: Aus einer Urne mit $s = 8$ schwarzen, $r = 6$ roten und $g = 4$ grünen Kugeln werden so lange Kugeln gezogen und nach jedem Zug wieder zurückgelegt, bis erstmals hintereinander zwei gleich gefärbte Kugeln gezogen werden. Die Zufallsvariable Z gibt an, wieviele Züge dafür notwendig sind. Man ermittle die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ von Z.

▼

15.3.10 Beispiel: Aus dem Intervall [0, 1] werden zufällig drei Zahlen ausgewählt. Man ermittle die empirische Verteilungsfunktion $\hat{\mathbb{F}}_Z$ ihrer Summe Z.

▼