§20 Charakteristische Funktionen

Viele Probleme im Umgang mit Verteilungen lassen sich einfacher behandeln, wenn man sie in einen geeigneten Raum abbildet. Die Verwendung von derartigen Transformationen ist manchmal dann von Vorteil, wenn sich ein Problem direkt nur schwer behandeln lässt. In diesem Fall versucht man, das ursprüngliche Problem zu transformieren, das transformierte Problem zu lösen und die Lösung des transformierten Problems wieder zurück zu transformieren um auf diese Weise das ursprüngliche Problem zu lösen.

Wir befassen uns in diesem Abschnitt mit drei derartigen Transformationen. Die erste dieser Transformationen wird bei diskreten Verteilungen, deren Träger eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ist, angewendet. Die zweite Transformation verwendet man bei stetigen Verteilungen, deren Träger eine Teilmenge von $[0, \infty[$ ist. Die dritte Transformationen eignet sich für beliebige stetige Verteilungen. In allen drei Fällen handelt es sich in gewisser Weise um Spezialfälle jener Transformation, welche einer beliebigen Verteilung ihre charakteristische Funktion zuordnet.

20.1 Die erzeugende Funktion

Achtung! Unter einer diskreten Verteilung bzw unter einer diskreten Zufallsvariablen verstehen wir in diesem Abschnitt stets eine Verteilung bzw eine Zufallsvariable, deren Träger eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ist.

20.1.1 Definition: Ist $\mathbb{P}$ eine diskrete Verteilung mit der Verteilungsdichte $\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}$, so heißt die durch

$$\mathcal{G}_{\mathbb{P}}[s] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[k]\, s^k$$

im Konvergenzbereich dieser Reihe definierte Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$, die erzeugende Funktion (im Englischen generating function) der Verteilung $\mathbb{P}$. Unter der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_Z$ einer diskreten Zufallsvariablen Z versteht man die erzeugende Funktion ihrer Verteilung $\mathbb{P}_Z$.

20.1.2 Bemerkung: Bei der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ einer diskreten Verteilung $\mathbb{P}$ handelt es sich offenbar um ein Polynom bzw um eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius $r \geq 1$ ist. Es gilt nämlich stets

$$\mathcal{G}_{\mathbb{P}}[1] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[k] = 1$$

Damit können wir die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ einer diskreten Verteilung im Intervall $]-r, r[$ beliebig oft gliedweise differenzieren und integrieren.

Die Berechnung der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ einer diskreten Verteilung $\mathbb{P}$ läuft auf die Berechnung des Erwartungswerts $\mathbb{E}[s^Z]$ von s^Z hinaus, wobei die Zufallsvariable Z die Verteilung $\mathbb{P}$ besitzt. Die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ einer diskreten Verteilung $\mathbb{P}$ lässt sich daher mit *Mathematica* mühelos ermitteln (um "schöne" Formeln zu erhalten, vereinfache man gegebenenfalls die Ergebnisse mit Hilfe von Simplify bzw FullSimplify und verwende dabei die Bedingungen über die Parameter der jeweiligen Verteilung). Handelt es sich bei der diskreten Verteilung $\mathbb{P}$ um eine in *Mathematica* implementierte Verteilung, so lässt sich die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ von $\mathbb{P}$ aber auch unter Verwendung des Befehls CharacteristicFunction ermitteln:

■ CharacteristicFunction[*distribution*, $-i$ Log[s]]

liefert die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}[s]$ der diskreten, in *Mathematica* implementierten Verteilung *distribution*. Warum wir als Argument den Ausdruck $-i$ Log[s] verwenden wird klar werden, wenn wir uns mit der charakteristischen Funktion einer beliebigen Verteilung befassen (man vergleiche dazu Bemerkung 20.4.2).

Wir wollen nun die erzeugenden Funktionen von einigen wichtigen, in *Mathematica* implementierten diskreten Verteilungen ermitteln:

20.1.3 Beispiel: Man ermittle die erzeugende Funktion der diskreten Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{m, n\}]$.

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[DiscreteUniformDistribution[{m, n}], -i Log[s]]
```

$$\frac{-s^m + s^{1+n}}{(1 - m + n)\ (-1 + s)}$$

besitzt die diskrete Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{m, n\}]$ die erzeugende Funktion

$$\mathcal{G}_{\mathcal{U}[\{m,n\}]}[s] = \frac{1}{n+m-1}\left(s^m + s^{m+1} + \ldots + s^n\right) = \frac{s^{n+1} - s^m)}{(n-m+1)\,(s-1)}$$

20.1.4 Beispiel: Man ermittle die erzeugende Funktion der Binomialverteilung $\mathcal{B}[n, k]$.

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[BinomialDistribution[n, p], -i Log[s]]
```

$$(1 - p + p\,s)^n$$

besitzt die Binomialverteilung $\mathcal{B}[n,\ p]$ die erzeugende Funktion

$$\mathcal{G}_{\mathcal{B}[n,p]}[s] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, s^k = (1 - p + p\,s)^n$$

20.1.5 Beispiel: Man ermittle die erzeugende Funktion der negativen Binomialverteilung $\mathcal{NB}[n,\ p]$.

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[NegativeBinomialDistribution[n, p], -i Log[s]]
```

$$\left(\frac{p}{1 - (1 - p)\ s}\right)^n$$

besitzt die negative Binomialverteilung $\mathcal{NB}[n,\ p]$ die erzeugende Funktion

$$\mathcal{G}_{\mathcal{NB}[n,p]}[s] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k\, s^k = \frac{p^n}{(1 - s + p\,s)^n}$$

Diese Potenzreihe konvergiert offenbar für alle $s \in]-r, r[$ mit $r = 1/(1-p)$.

20.1.6 Beispiel: Man ermittle die erzeugende Funktion der Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$.

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[PoissonDistribution[λ], -i Log[s]]
```

$e^{(-1+s)\,\lambda}$

besitzt die Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$ die erzeugende Funktion

$$\mathcal{G}_{\mathcal{P}[\lambda]}[s] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,s^k = e^{\lambda\,(s-1)}$$

Diese Potenzreihe konvergiert offenbar für alle $s \in \mathbb{R}$.

Die erzeugenden Funktionen besitzen eine Reihe von interessanten Eigenschaften:

20.1.7 Satz: Ist $\mathbb{P}$ eine diskrete Verteilung, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[n] = \frac{1}{n!}\,\mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{(n)}[0]$$

Eine diskrete Verteilung $\mathbb{P}$ ist somit durch ihre erzeugende Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ vollständig bestimmt - oder anders ausgedrückt - die erzeugenden Funktionen zweier diskreter Verteilungen stimmen genau dann überein, wenn die beiden Verteilungen überein stimmen.

▼

Beweis: Die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ ist jedenfalls im Intervall $]-1, 1[$ beliebig oft differenzierbar. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $s \in]-1, 1[$

$$\mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{(n)}[s] = \frac{d^n}{d\,s^n}\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[k]\,s^k = \sum_{k=n}^{\infty} k\,(k-1)\ldots(k-n+1)\,\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[k]\,s^{k-n}$$

was offenbar

$$\mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{(n)}[0] = n!\,\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[n]$$

zur Folge hat.

20.1.8 Satz: Ist Z eine diskrete Zufallsvariable, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass die n-te Potenz von Z integrierbar ist

$$\mathbb{E}[Z\,(Z-1)\,(Z-2)\ldots(Z-n+1)] = \mathcal{G}_Z^{(n)}[1]$$

Man nennt diesen Erwartungswert das n-te faktorielle Moment von Z. Ist Z integrierbar bzw quadratisch integrierbar, so gilt speziell

$$\mathbb{E}[Z] = \mathcal{G}_Z'[1] \quad \text{bzw} \quad \mathbb{V}[Z] = \mathcal{G}_Z''[1] + \mathcal{G}_Z'[1] - (\mathcal{G}_Z'[1])^2$$

▼

Beweis: Die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_Z$ ist bekanntlich im Intervall $]-1, 1[$ beliebig oft differenzierbar. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s \in]-1, 1[$

$$\mathcal{G}_Z^{(n)}[s] = \frac{d^n}{d\,s^n}\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{f}_Z[k]\,s^k = \sum_{k=n}^{\infty} k\,(k-1)\ldots(k-n+1)\,\mathfrak{f}_Z[k]\,s^{k-n}$$

Bei einer Reihe mit lauter positiven Gliedern darf man die Limesbildung und die Summation vertauschen. Außerdem ist eine Potenzreihe, welche an der Stelle 1 konvergiert, an dieser Stelle linksseitig stetig. Also gilt

$$\mathcal{G}_Z^{(n)}[1] = \lim_{s\uparrow 1} \mathcal{G}_Z^{(n)}[s] = \lim_{s\uparrow 1} \sum_{k=n}^{\infty} k\,(k-1)\ldots(k-n+1)\,\mathbb{f}_Z[k]\,s^{k-n} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k\,(k-1)\ldots(k-n+1)\,\mathbb{f}_Z[k] = \mathbb{E}[Z\,(Z-1)\,(Z-2)\ldots(Z-n+1)]$$

Ist speziell Z integrierbar bzw quadratisch integrierbar, so folgt daraus

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{f}_Z[k] = \mathcal{G}_Z'[1] \quad \text{bzw} \quad \mathbb{E}[Z\,(Z-1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,\mathbb{f}_Z[k] = \mathcal{G}_Z''[1]$$

und damit

$$\mathbb{V}[Z] = \mathbb{E}\left[Z^2\right] - \mathbb{E}[Z]^2 = \mathbb{E}[Z\,(Z-1)] + \mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Z]^2 = \mathcal{G}_Z''[1] + \mathcal{G}_Z'[1] - (\mathcal{G}_Z'[1])^2$$

20.1.9 Satz: Sind die beiden diskreten Zufallsvariablen X und Y unabhängig, so gilt für alle s aus dem Konvergenzbereich der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_{X+Y}$ der Summe $X + Y$ dieser beiden Zufallsvariablen

$$\mathcal{G}_{X+Y}[s] = \mathcal{G}_X[s]\,\mathcal{G}_Y[s]$$

Für zwei beliebige diskrete Verteilungen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ gilt damit

$$\mathcal{G}_{\mathbb{P}*\mathbb{Q}}[s] = \mathcal{G}_{\mathbb{P}}[s]\,\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}[s]$$

▼

Beweis: Für alle s aus dem Konvergenzbereich der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_{X+Y}$ gilt wegen Satz 19.1.3

$$\mathcal{G}_{X+Y}[s] = \mathbb{E}[s^{X+Y}] = \mathbb{E}[s^X\,s^Y] = \mathbb{E}[s^X]\,\mathbb{E}[s^Y] = \mathcal{G}_X[s]\,\mathcal{G}_Y[s]$$

Es folgen wieder einige Beispiele:

20.1.10 Beispiel: Von der diskreten Zufallsvariablen Z ist bekannt, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{f}_Z[z] = \mathbb{P}[\{Z = k\}]$ proportional zu γ^k ist (wobei $0 < \gamma < 1$ vorausgesetzt wird). Man berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$ von Z.

▼

Lösung: Natürlich kann diese Frage mit den üblichen Methoden gelöst werden. Wir zeigen nun aber, wie sich diese Fragestellung unter Verwendung der erzeugenden Funktion behandeln lässt:

Aus der Angabe entnimmt man, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ offenbar $\mathbb{f}_Z[z] = \mathbb{P}[\{Z = k\}] = \alpha\,\gamma^k$ gilt, wobei der Proportionalitätsfaktor α noch unbekannt ist. Damit gilt für die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_Z[s]$ von Z

$$\mathcal{G}_Z[s] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{f}_{\mathbb{P}}[k]\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha\,\gamma^k\, s^k = \frac{\alpha}{1 - \gamma\, s}$$

Nun ist aber bekanntlich $\mathcal{G}_Z[1] = 1$, was $\alpha = 1 - \gamma$ zur Folge hat. Wegen Satz 20.1.8 gilt daher

$$\mathbb{E}[Z] = \mathcal{G}_Z'[1] = \frac{\alpha\,\gamma}{(1 - \gamma)^2}$$

20.1.11 Beispiel: Von der diskreten Zufallsvariablen Z ist bekannt, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{f}_Z[k] = \mathbb{P}[\{Z = k\}]$ der Rekursionsbeziehung

$$\mathbb{f}_Z[k+2] = \alpha\, \mathbb{f}_Z[k+1] + \beta\, \mathbb{f}_Z[k]$$

genügen, wobei $\alpha + \beta + \mathbb{f}_Z[0]\,(1 - \alpha) < 1$ ist. Man berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{f}_Z[2] = \mathbb{P}[\{Z = 2\}]$ sowie den Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$ von Z.

▼

Lösung: Für die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_Z[s]$ von Z gilt

$$\mathcal{G}_Z[s] = \mathbb{f}_Z[0] + \mathbb{f}_Z[1]\, s + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{f}_Z[k]\, s^k = \mathbb{f}_Z[0] + \mathbb{f}_Z[1]\, s + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha\, \mathbb{f}_Z[k-1] + \beta\, \mathbb{f}_Z[k-2])\, s^k =$$

$$= \mathbb{f}_Z[0] + \mathbb{f}_Z[1]\, s + \alpha\, s \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{f}_Z[k]\, s^k + \beta\, s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{f}_Z[k]\, s^k =$$

$$= \mathbb{f}_Z[0] + \mathbb{f}_Z[1]\, s - \mathbb{f}_Z[0]\,\alpha\, s + \alpha\, s\, \mathcal{G}_Z[s] + \beta\, s^2\, \mathcal{G}_Z[s]$$

und damit

$$\mathcal{G}_Z[s] = \frac{\mathbb{f}_Z[0] + \mathbb{f}_Z[1]\, s - \mathbb{f}_Z[0]\,\alpha\, s}{1 - \alpha\, s - \beta\, s^2}$$

wobei zwischen den vier Parametern $\mathbb{f}_Z[0]$, $\mathbb{f}_Z[1]$, α und β wegen $\mathcal{G}_Z[1] = 1$ die Beziehung

$$\mathbb{f}_Z[1] = 1 - \alpha - \beta - \mathbb{f}_Z[0]\,(1 - \alpha)$$

gelten muss. Wegen Satz 20.1.7 bzw Satz 20.1.8 ergibt sich daher für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z = 2\}]$ bzw den Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$ von Z

$$\mathbb{P}[\{Z = 2\}] = \mathcal{G}_Z''[0]/2 = \alpha\,(1 - \beta - \mathbb{f}_Z[0]) - \alpha^2\,(1 - \mathbb{f}_Z[0]) + \beta\, \mathbb{f}_Z[0]$$

$$\mathbb{E}[Z] = \mathcal{G}_Z'[1] = \frac{1 + \beta - \mathbb{f}_Z[0]}{1 - \alpha - \beta}$$

Zur Herleitung dieser beiden Formeln haben wir dabei *Mathematica* verwendet:

```
GenFun[s_] := (f0 + f1 s − f0 α s)/(1 − α s − β s^2)
Simplify[D[GenFun[s], {s, 2}] /. {s → 0, f1 → 1 − α − β − f0 (1 − α)}]/2
Simplify[D[GenFun[s], s] /. {s → 1, f1 → 1 − α − β − f0 (1 − α)}]
Clear[GenFun]
```

$(-1 + \text{f0})\,\alpha^2 + \text{f0}\,\beta - \alpha\,(-1 + \text{f0} + \beta)$

$\frac{-1 + \text{f0} - \beta}{-1 + \alpha + \beta}$

20.1.12 Beispiel: Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man eine Eintrittskarte erhält, bei der die Summe der ersten und letzten drei Ziffern der Registriernummer gleich sind, wenn diese Registriernummer sechsstellig ist und einen beliebigen Wert zwischen 111 111 und 999 999 annehmen kann.

▼

Lösung: Die Zufallsvariable X_i, welche die i-te Stelle einer zufällig ausgewählten Registriernummer bezeichnet, ist offenbar auf der Menge $\{1, 2, \ldots, 9\}$ gleichverteilt. Außerdem sind die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_6$ vollständig unabhängig. Wegen Satz 20.1.9 besitzen die Zufallsvariablen $Y = X_1 + X_2 + X_3$ und $Z = X_4 + X_5 + X_6$ die erzeugenden Funktionen

$$\mathcal{G}_Y[s] = \mathcal{G}_{X_1}[s]\,\mathcal{G}_{X_2}[s]\,\mathcal{G}_{X_3}[s] \quad \text{bzw} \quad \mathcal{G}_Z[s] = \mathcal{G}_{X_4}[s]\,\mathcal{G}_{X_5}[s]\,\mathcal{G}_{X_6}[s]$$

Für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe X der ersten drei Ziffern und die Summe Y der letzten drei Ziffern einer zufällig ausgewählten Registriernummer übereinstimmen, gilt auf Grund von Symmetrieüberlegungen

$$\mathbb{P}[\{X = Y\}] = \sum_{k=3}^{27} \mathbb{P}[\{X = k\}]\,\mathbb{P}[\{Y = k\}] = \sum_{k=3}^{27} \mathbb{P}[\{X = k\}]\,\mathbb{P}[\{Y = 27 - k\}] = \mathbb{P}[\{X + Y = 27\}]$$

Bei der von uns gesuchten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{X = Y\}]$ handelt es sich offenbar um den Koeffizient von s^{27} der erzeugenden Funktion

$$\mathcal{G}_{X+Y}[s] = \mathcal{G}_X[s]\,\mathcal{G}_Y[s] = \mathcal{G}_{X_1}[s]\,\mathcal{G}_{X_2}[s] \ldots \mathcal{G}_{X_6}[s]$$

Dieser Koeffizient lässt sich mit den Befehlen CharacteristicFunction, Apart (damit wird die erzeugende Funktion der Gleichverteilung auf der Menge $\{1, 2, \ldots, 9\}$ in ein Polynom umgeformt) und Coefficient (damit lassen sich die Koeffizienten eines Polynoms ermitteln) mühelos berechnen:

```
Coefficient[Apart[CharacteristicFunction[DiscreteUniformDistribution[{1, 9}], −i Log[s]]]^6, s, 27] //
  N
```

```
0.0554944
```

20.1.13 Beispiel: Die diskreten Zufallsvariablen $N, X_1, X_2, \ldots$ seien vollständig unabhängig, die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ seien identisch verteilt mit der (gleichen) erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_X$. Man ermittle die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_Z$ der Zufallsvariablen $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

▼

Lösung: Für alle s aus dem Konvergenzbereich von $\mathcal{G}_Z$ folgt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit zusammen mit Satz 19.1.3 und Satz 20.1.9

$$\mathcal{G}_Z[s] = \mathbb{E}[s^Z] = \mathbb{E}[s^{X_1+X_2+\ldots+X_N}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1+X_2+\ldots+X_N} \mid \{N = n\}]\,\mathbb{P}[\{N = n\}] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1+X_2+\ldots+X_n}]\,\mathbb{P}[\{N = n\}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1}]\,\mathbb{E}[s^{X_2}] \ldots \mathbb{E}[s^{X_n}]\,\mathbb{P}[\{N = n\}] =$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_X[s]^n \, \mathbb{P}[\{N = n\}] = \mathcal{G}_N[\mathcal{G}_X[s]]$

20.1.14 Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Würfeln mit $n = 8$ Würfeln die Augensumme $m = 30$ zu erzielen?

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit X_i die mit dem i-ten Würfel gewürfelte Augenzahl und mit $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ die dabei erzielte Augensumme. Da die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vollständig unabhängig sind, gilt wegen Satz 20.1.9 für die erzeugende Funktion von Z offenbar

$$\mathcal{G}_Z[s] = \mathcal{G}_{X_1}[s] \, \mathcal{G}_{X_2}[s] \ldots \mathcal{G}_{X_n}[s]$$

Die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z = m\}]$ entspricht dem Koeffizienten von s^m der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_Z[s]$ und lässt sich (man vergleiche Beispiel 20.1.12) mit Hilfe von *Mathematica* mühelos berechnen:

```
n = 8; m = 30;
Coefficient[Apart[CharacteristicFunction[DiscreteUniformDistribution[{1, 6}], -i Log[s]]]^n, s, m] // N
Clear[n, m]
```

```
0.0747719
```

Der Begriff der erzeugenden Funktion lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

20.1.15 Definition: Ist $f = \{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ eine Folge von reellen Zahlen, so nennt man die durch

$$\mathcal{G}_f[s] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, s^k$$

im Konvergenzbereich dieser Reihe definierte Funktion $\mathcal{G}_f$ die erzeugende Funktion der Folge f. Damit entspricht die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_Z$ einer diskreten Zufallsvariablen Z offenbar der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_f$ der Folge $f = \{\mathbb{f}_Z[0], \mathbb{f}_Z[1], \mathbb{f}_Z[2], \ldots\}$. Analog zu Satz 20.1.7 gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wieder

$$f_n = \frac{1}{n!} \, \mathcal{G}_f^{(n)}[0]$$

20.1.16 Beispiel: Sei Z eine diskrete Zufallsvariable und sei $g = \{\mathbb{P}[\{Z > 0\}], \mathbb{P}[\{Z > 1\}], \mathbb{P}[\{Z > 2\}], \ldots\}$. Man zeige, dass zwischen der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_Z$ der Zufallsvariablen Z und der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_g$ der Folge g für alle s aus dem Intervall $]-1, 1[$ die folgende Beziehung besteht

$$\mathcal{G}_g[s] = \frac{1 - \mathcal{G}_Z[s]}{1 - s}$$

▼

Lösung: Da alle Koeffizienten der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_g$ durch 1 beschränkt sind, konvergiert diese Potenzreihe jedenfalls für alle s aus dem Intervall $]-1, 1[$. Für diese s gilt aber

$$(1 - s) \, \mathcal{G}_g[s] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{Z > k\}] \, s^k - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{Z > k\}] \, s^{k+1} =$$

$$= \mathbb{P}[\{Z > 0\}] - \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{P}[\{Z > k - 1\}] - \mathbb{P}[\{Z > k\}]) \, s^k =$$

$$= 1 - \mathbb{P}[\{Z = 0\}] - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[\{Z = k\}] \, s^k = 1 - \mathcal{G}_Z[s]$$

20.1.17 Beispiel: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ seien vollständig unabhängige Ereignisse. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens m dieser Ereignisse eintreten.

▼

Lösung: Die Zufallsvariable Z gebe an, wieviele der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eintreten. Mit den Abkürzungen $p_i = \mathbb{P}[A_i]$ und $q_i = 1 - \mathbb{P}[A_i]$ ergibt sich für die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_Z[s]$ von Z

$$\mathcal{G}_Z[s] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\{Z = k\}]\, s^k = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left[\left\{\begin{matrix}\text{genau } k \text{ der Ereignisse} \\ A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ treten ein}\end{matrix}\right\}\right] s^k = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i\, s)$$

Für die erzeugende Funktion $\mathcal{G}_h$ der Folge $h = \{\mathbb{P}[\{Z \leq 0\}], \mathbb{P}[\{Z \leq 1\}], \ldots, \mathbb{P}[\{Z \leq n\}]\}$ der von uns gesuchten Wahrscheinlichkeiten gilt daher mit den in Beispiel 20.1.16 verwendeten Bezeichnungen für alle $s \in]-1, 1[$

$$\mathcal{G}_h[s] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\{Z \leq k\}]\, s^k = \sum_{k=0}^{n} (1 - \mathbb{P}[\{Z > k\}])\, s^k = \sum_{k=0}^{n} s^k - \sum_{k=0}^{n} (\mathbb{P}[\{Z > k\}])\, s^k =$$

$$= 1 + s + s^2 + \ldots + s^n - \mathcal{G}_g[s] = \frac{1 - s^{n+1}}{1 - s} - \frac{1 - \mathcal{G}_Z[s]}{1 - s} = \frac{\prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i\, s) - s^{n+1}}{1 - s}$$

Für beliebige Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ und ein beliebiges $m \leq n$ lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z \leq m\}]$ (man vergleiche Beispiel 20.1.12) mühelos mit Hilfe von *Mathematica* ermitteln. Beispielsweise gilt:

```
p = {0.2, 0.4, 0.1, 0.6, 0.4, 0.2, 0.6, 0.4, 0.2, 0.5};
n = Length[p]; m = 4;
GenFun[s_] := (Apply[Times, (1 - p + s p)] - s^(n+1))/(1 - s);
Coefficient[Apart[GenFun[s]], s, m]
Clear[p, n, m, GenFun]
```

```
0.741823
```

20.2 Die Laplace-Transformation

Achtung! Wir befassen uns in diesem Abschnitt nur mit stetigen Verteilungen bzw stetigen Zufallsvariablen, deren Träger eine Teilmenge von $[0, \infty[$ ist.

20.2.1 Definition: Ist $\mathbb{P}$ eine stetige Verteilung mit der Verteilungsdichte $\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}$, so heißt die durch

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}}[s] = \int_0^{\infty} e^{-s\, z}\, \mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[z]\, dz$$

auf $[0, \infty[$ definierte Funktion $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$, die Laplace-Transformierte der Verteilung $\mathbb{P}$. Unter der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}_Z$ einer stetigen Zufallsvariablen Z versteht man die Laplace-Transformierte ihrer Verteilung $\mathbb{P}_Z$.

20.2.2 Bemerkung: Für die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ gilt stets

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}}[s] = \int_0^{\infty} e^{-s\, z}\, \mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[z]\, dz \leq \int_0^{\infty} \mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[z]\, dz = 1 = \mathcal{L}_{\mathbb{P}}[0]$$

Aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (auf den wir hier nicht näher eingehen wollen) folgt daraus, dass die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung im Intervall $]0, \infty[$ beliebig oft differenzierbar ist und dabei die Operationen Differenziation und Integration vertauscht werden dürfen.

Im Prinzip lässt sich die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ mit der Verteilungsdichte $\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}$ mit Hilfe von *Mathematica* ermitteln, indem man einfach das in der Definition auftretende Integral auswertet. Einfacher geht es, wenn man dazu den in *Mathematica* implementierten Befehl LaplaceTransform verwendet. Handelt es sich bei der stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ um eine in *Mathematica* implementierte Verteilung, so lässt sich die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ von $\mathbb{P}$ auch unter Verwendung des Befehls CharacteristicFunction bestimmen:

■ LaplaceTransform[$\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z], z, s$]

liefert die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}[s]$ der stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ mit der Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z]$.

■ CharacteristicFunction[*distribution*, $i\, s$]

liefert die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}[s]$ der stetigen, in *Mathematica* implementierten Verteilung *distribution*. Warum wir als Argument den Ausdruck $i\, s$ verwenden, wird klar werden, wenn wir uns mit der charakteristischen Funktion einer beliebigen Verteilung befassen (man vergleiche dazu Bemerkung 20.4.2).

Wir wollen nun die Laplace-Transformierte von einigen wichtigen, in *Mathematica* implementierten stetigen Verteilungen ermitteln:

20.2.3 Beispiel: Man ermittle die Laplace-Transformierte der Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{a, b\}]$ (mit $0 \leq a < b$).

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[UniformDistribution[{a, b}], ⅈ s]
```

$$-\frac{-e^{-a s}+e^{-b s}}{(-a+b)\, s}$$

besitzt die Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{a, b\}]$ die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}[\{a,b\}]}[s] = \int_a^b e^{-s z}\, \frac{1}{b-a}\, dz = \frac{e^{-a s}-e^{-b s}}{s\,(b-a)}$$

20.2.4 Beispiel: Man ermittle die Laplace-Transformierte der Dreiecksverteilung $\mathcal{D}[\{a, b\}]$ (mit $0 \leq a < b$).

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[TriangularDistribution[{a, b}], ⅈ s]
```

$$\frac{4\left(e^{-\frac{a s}{2}}-e^{-\frac{b s}{2}}\right)^2}{(a-b)^2\, s^2}$$

besitzt die Dreiecksverteilung $\mathcal{D}[\{a, b\}]$ die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}[\{a,b\}]}[s] = \int_a^{(a+b)/2} e^{-s z}\, \frac{4\,(z-a)}{(b-a)^2}\, dz + \int_{(a+b)/2}^{b} e^{-s z}\, \frac{4\,(b-z)}{(b-a)^2}\, dz = \frac{4\,(e^{-a s/2}-e^{-b s/2})^2}{s^2\,(b-a)^2}$$

20.2.5 Beispiel: Man ermittle die Laplace-Transformierte der Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$.

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[ExponentialDistribution[λ], ⅈ s]
```

$$\frac{\lambda}{s + \lambda}$$

besitzt die Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$ die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}_{\mathcal{E}[\lambda]}[s] = \int_0^\infty e^{-s\,z}\,\lambda\,e^{-\lambda\,z}\,dz = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

20.2.6 Beispiel: Man ermittle die Laplace-Transformierte der Gammaverteilung $\mathcal{G}amma[\alpha, \lambda]$.

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[GammaDistribution[α, λ], ⅈ s]
```

$$(1 + s\,\lambda)^{-\alpha}$$

besitzt die Gammaverteilung $\mathcal{G}amma[\alpha, \lambda]$ die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}amma[\alpha,\lambda]}[s] = \frac{1}{\Gamma[\alpha]}\int_0^\infty e^{-s\,z}\,\lambda^{-\alpha}\,z^{\alpha-1}\,e^{-z/\lambda}\,dz = (1 + \lambda\,s)^{-\alpha}$$

20.2.7 Beispiel: Man ermittle die Laplace-Transformierte der Chi-Quadrat Verteilung $\mathcal{C}hi[n]$.

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[ChiSquareDistribution[n], ⅈ s]
```

$$(1 + 2\,s)^{-n/2}$$

besitzt die Chi-Quadrat Verteilung $\mathcal{C}\mathrm{hi}[n]$ die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}\mathrm{hi}[n]}[s] = \frac{1}{\Gamma[n/2]}\int_0^\infty e^{-s\,z}\,2^{-n/2}\,e^{-z/2}\,z^{n/2-1}\,dz = (1 + 2\,s)^{-n/2}$$

20.2.8 Beispiel: Man ermittle die Laplace-Transformierte der Extremwertverteilung $\mathcal{E}xtrem[\mu, \beta]$.

▼

Lösung: Wegen

```
CharacteristicFunction[ExtremeValueDistribution[μ, β], ⅈ s]
```

$$e^{-s\,\mu}\,\mathrm{Gamma}[1 + s\,\beta]$$

besitzt die Extremwertverteilung $\mathcal{E}xtrem[\mu, \beta]$ die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}_{\mathcal{E}xtrem[\mu,\beta]}[s] = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{-s z}\, e^{(\mu-z)/\beta - e^{(\mu-z)/\beta}}\, dz = e^{-\mu s}\, \Gamma[1+\beta s]$$

Die Laplace-Transformation besitzt eine Reihe von interessanten Eigenschaften. Ohne auf den Beweis näher eingehen zu können (man benötigt dazu ein tiefliegendes Wissen über komplexe Analysis), beginnen wir mit der sogenannten Umkehrformel:

20.2.9 Satz (Umkehrformel): Ist $\mathbb{P}$ eine stetige Verteilung mit Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$, so gilt für alle $z > 0$

$$\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z] = \frac{1}{2 \pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{i s z}\, \mathcal{L}_{\mathbb{P}}[s]\, ds$$

wobei γ eine beliebige Konstante ist, welche so gewählt werden muss, dass die Realteile aller singulären Stellen von $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ kleiner als γ sind. Eine stetige Verteilung $\mathbb{P}$ ist somit durch ihre Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ vollständig bestimmt - oder anders ausgedrückt - die Laplace-Transformierten zweier stetiger Verteilungen stimmen genau dann überein, wenn die beiden Verteilungen überein stimmen.

Im Prinzip lässt sich die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ aus der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ mit Hilfe von *Mathematica* ermitteln, indem man einfach dieses komplexe Integral auswertet. Einfacher geht es, wenn man dazu den in *Mathematica* implementierten Befehl InverseLaplaceTransform verwendet:

■ InverseLaplaceTransform[$\mathcal{L}_{\mathbb{P}}[s]$, s, z]

berechnet die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ jener stetigen Verteilung $\mathbb{P}$, welche die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ besitzt.

Wir zeigen die Verwendung der Befehle LaplaceTransform und InverseLaplaceTransform an einem Beispiel (man beachte allerdings, dass diese beiden Befehle leider oft nicht zum Ziel führen, da *Mathematica* die dabei auftretenden Integrale nur in seltenen Fällen tatsächlich berechnen kann):

20.2.10 Beispiel: Für die Gammaverteilung berechne man die Laplace-Transformierte mit Hilfe des Befehls LaplaceTransform. Anschließend ermittle man aus dieser Laplace-Transformierten wieder die Verteilungsdichte der Gammaverteilung unter Verwendung des Befehls InverseLaplaceTransform.

▼

Lösung: Die Gammaverteilung $\mathcal{G}amma[\alpha, \lambda]$ besitzt die Verteilungsdichte

```
f[z_] := PDF[GammaDistribution[α, λ], z]; f[z]
```

$$\frac{e^{-\frac{z}{\lambda}}\, z^{-1+\alpha}\, \lambda^{-\alpha}}{\mathrm{Gamma}[\alpha]}$$

a) Wendet man auf diese Verteilungsdichte den Befehl LaplaceTransform an, so erhält man die Laplace-Transformierte der Gammaverteilung:

```
lt[s_] := LaplaceTransform[f[z], z, s]; lt[s]
```

$$\left(s + \frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha} \lambda^{-\alpha}$$

b) Wendet man auf diese Laplace-Transformierte den Befehl InverseLaplaceTransform an, so erhält man wieder die Verteilungsdichte der Gammaverteilung:

InverseLaplaceTransform[lt[s], s, z]

$$\frac{e^{-\frac{z}{\lambda}}\, z^{-1+\alpha}\, \lambda^{-\alpha}}{\mathrm{Gamma}[\alpha]}$$

Clear[f, lt]

20.2.11 Satz: Ist Z eine stetige Zufallsvariable, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass die n-te Potenz von Z integrierbar ist

$$\mathbb{E}[Z^n] = (-1)^n\, \mathcal{L}_Z^{(n)}[0]$$

Ist Z integrierbar bzw quadratisch integrierbar, so gilt speziell

$$\mathbb{E}[Z] = -\mathcal{L}_Z'[0] \quad \text{bzw} \quad \mathbb{V}[Z] = \mathcal{L}_Z''[0] - (\mathcal{L}_Z'[0])^2$$

▼

Beweis: Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_Z$ einer stetigen Zufallsvariablen Z ist im Intervall $]0, \infty[$ bekanntlich beliebig oft differenzierbar, wobei die beiden Operationen Differenziation und Integration vertauscht werden dürfen. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s \in]0, \infty[$

$$\mathcal{L}_Z^{(n)}[s] = \frac{d^n}{d s^n} \int_0^\infty e^{-s z}\, \mathbb{f}_Z[z]\, dz = \int_0^\infty \frac{d^n}{d s^n} (e^{-s z}\, \mathbb{f}_Z[z])\, dz = (-1)^n \int_0^\infty z^n\, e^{-s z}\, \mathbb{f}_Z[z]\, dz$$

Falls Z^n integrierbar ist, so ist die n-te Ableitung der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}_Z[s]$ an der Stelle $s = 0$ rechtsseitig stetig und die beiden Operationen Limesbildung und Integration dürfen vertauscht werden (diese Tatsache folgt ebenfalls aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz). Damit gilt

$$\mathcal{L}_Z^{(n)}[0] = \lim_{s\downarrow 0} \mathcal{L}_Z^{(n)}[s] = (-1)^n \lim_{s\downarrow 0} \int_0^\infty z^n\, e^{-s z}\, \mathbb{f}_Z[z]\, dz = (-1)^n \int_0^\infty \lim_{s\downarrow 0} (z^n\, e^{-s z}\, \mathbb{f}_Z[z])\, dz =$$
$$= (-1)^n \int_0^\infty z^n\, \mathbb{f}_Z[z]\, dz = (-1)^n\, \mathbb{E}[Z^n]$$

Ist speziell Z integrierbar bzw quadratisch integrierbar, so folgt daraus

$$\mathbb{E}[Z] = -\mathcal{L}_Z'[0] \quad \text{bzw} \quad \mathbb{E}[Z^2] = \mathcal{L}_Z''[0]$$

und damit

$$\mathbb{V}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \mathcal{L}_Z''[0] - (\mathcal{L}_Z'[0])^2$$

Vollständig analog zu Satz 20.1.9 zeigt man

20.2.12 Satz: Sind die beiden stetigen Zufallsvariablen X und Y unabhängig, so gilt für alle $s > 0$

$$\mathcal{L}_{X+Y}[s] = \mathcal{L}_X[s]\,\mathcal{L}_Y[s]$$

Für zwei beliebige stetige Verteilungen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ gilt damit

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}*\mathbb{Q}}[s] = \mathcal{L}_{\mathbb{P}}[s]\,\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}[s]$$

Es folgen wieder einige Beispiele:

20.2.13 Beispiel: Von der stetigen Zufallsvariable Z ist bekannt, dass für alle $z \geq 0$ die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z[z]$ proportional zu γ^z ist (wobei $0 < \gamma < 1$ vorausgesetzt wird). Man berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$ von Z.

▼

Lösung: Natürlich kann diese Frage mit den üblichen Methoden gelöst werden. Wir zeigen aber wieder, wie sich diese Fragestellung unter Verwendung der Laplace-Transformation behandeln lässt:

Aus der Angabe entnimmt man, dass für alle $s \geq 0$ offenbar $\mathbb{f}_Z[z] = \alpha\,\gamma^z$ gilt, wobei der Proportionalitätsfaktor α noch unbekannt ist. Damit gilt für die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_Z[s]$ von Z

$$\mathcal{L}_Z[s] = \int_0^\infty e^{-s\,z}\,\alpha\,\gamma^z\,dz = \frac{\alpha}{s - \mathrm{Log}[\gamma]}$$

Nun ist aber bekanntlich $\mathcal{L}_Z[0] = 1$, was $\alpha = -\mathrm{Log}[\gamma]$ zur Folge hat. Wegen Satz 20.2.11 gilt damit

$$\mathbb{E}[Z] = -\mathcal{L}_Z'[0] = -\frac{\alpha}{(\mathrm{Log}[\gamma])^2}$$

20.2.14 Beispiel: Unter Verwendung der Laplace-Transformation zeige man die beiden Faltungsformeln

$$\mathcal{G}amma[\alpha, \lambda] * \mathcal{G}amma[\beta, \lambda] = \mathcal{G}amma[\alpha + \beta, \lambda]$$
$$\mathcal{C}hi[m] * \mathcal{C}hi[n] = \mathcal{C}hi[m + n]$$

▼

Lösung: Wegen Satz 20.2.12 und Satz 20.2.9 müssen wir nur zeigen, dass das Produkt der Laplace-Transformierten der beiden Verteilungen auf der linken Seite mit der Laplace-Transformierten der Verteilung auf der rechten Seite übereinstimmt:

```
CharacteristicFunction[GammaDistribution[α, λ], ⅈ s] CharacteristicFunction[GammaDistribution[β, λ], ⅈ s] ==
    CharacteristicFunction[GammaDistribution[α + β, λ], ⅈ s] // FullSimplify
```

```
True
```

```
CharacteristicFunction[ChiSquareDistribution[m], ⅈ s] CharacteristicFunction[ChiSquareDistribution[n], ⅈ s] ==
    CharacteristicFunction[ChiSquareDistribution[m + n], ⅈ s] // FullSimplify
```

```
True
```

20.2.15 Beispiel: Die Zufallvariablen X_1, X_2, X_3 seien vollständig unabhängig und exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda_1 = 1$ bzw $\lambda_2 = 2$ bzw $\lambda_3 = 3$. Gesucht ist die Verteilungsdichte von $Z = X_1 + X_2 + X_3$.

▼

Lösung: Für alle $s > 0$ gilt wegen Satz 20.2.12 zusammen mit Beispiel 20.2.5

$$\mathcal{L}_Z[s] = \mathcal{L}_{X_1+X_2+X_3}[s] = \mathcal{L}_{X_1}[s]\,\mathcal{L}_{X_1}[s]\,\mathcal{L}_{X_1}[s] = \frac{1}{1+s}\;\frac{2}{2+s}\;\frac{3}{3+s} = \frac{6}{(1+s)(2+s)(3+s)}$$

Wendet man nun auf $\mathcal{L}_Z$ die Umkehrformel an

```
InverseLaplaceTransform[6 / ((1 + s) (2 + s) (3 + s)), s, z]
```

$$3\, e^{-3 z} \left(-1 + e^{z}\right)^{2}$$

so erhält man direkt die gesuchte Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$

$$\mathbb{f}_Z[z] = \begin{cases} 3\,(-1 + e^{z})^2\, e^{-3z} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Begriff der Laplace-Transformierten lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

20.2.16 Definition: Ist f eine stetige und beschränkte Abbildung von $[0, \infty[$ in $\mathbb{R}$, so nennt man die durch

$$\mathcal{L}_f[s] = \int_0^\infty e^{-s z}\, f[z]\, dz$$

auf $]0, \infty[$ definierte Funktion $\mathcal{L}_f$ die Laplace-Transformierte der Funktion f. Damit entspricht die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_Z$ einer stetigen Zufallsvariablen Z der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}_{\mathbb{f}_Z}$ ihrer Verteilungsdichte.

20.2.17 Beispiel: Sei Z eine stetige Zufallsvariable. Man zeige, dass zwischen der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ der Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ und der LaplaceTransformierten $\mathcal{L}_{\mathbb{f}}$ der Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ von Z für alle $s > 0$ die folgende Beziehung gilt

$$\mathcal{L}_{\mathbb{F}}[s] = \frac{1}{s}\, \mathcal{L}_{\mathbb{f}}[s]$$

▼

Lösung: Partielle Integration liefert für alle $s > 0$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{F}}[s] = \int_0^\infty e^{-s z}\, \mathbb{F}[z]\, dz = -\frac{1}{s} e^{-s z}\, \mathbb{F}[z]\Big|_{z=0}^{z=\infty} + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-s z}\, \mathbb{f}[z]\, dz = \frac{1}{s}\, \mathcal{L}_{\mathbb{f}}[s]$$

20.3 Die Fourier-Transformation

Achtung! Wir befassen uns in diesem Abschnitt nur mit stetigen Verteilungen bzw stetigen Zufallsvariablen.

20.3.1 Definition: Ist $\mathbb{P}$ eine stetige Verteilung mit der Verteilungsdichte $\mathbb{f}_\mathbb{P}$, so heißt die durch

$$\mathcal{F}_\mathbb{P}[s] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\, s\, z}\, \mathbb{f}_\mathbb{P}[z]\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Cos}[s\, z]\, \mathbb{f}_\mathbb{P}[z]\, dz + i \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sin}[s\, z]\, \mathbb{f}_\mathbb{P}[z]\, dz$$

auf $\mathbb{R}$ definierte komplexwertige Funktion $\mathcal{F}_\mathbb{P}$, die Fourier-Transformierte der Verteilung $\mathbb{P}$. Unter der Fourier-Transformierten $\mathcal{F}_Z$ einer stetigen Zufallsvariablen Z versteht man die Fourier-Transformierte ihrer Verteilung $\mathbb{P}_Z$.

▼

Zwischen der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}_\mathbb{P}[s]$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$, deren Träger eine Teilmenge von $[0, \infty[$ ist, und der Fourier-Transformierten $\mathcal{F}_\mathbb{P}[s]$ dieser Verteilung besteht für alle $s \geq 0$ offenbar die Beziehung

$$\mathcal{L}_\mathbb{P}[s] = \mathcal{F}_\mathbb{P}[i\, s]$$

20.3.2 Bemerkung: Für die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_\mathbb{P}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ gilt stets

$$|\mathcal{F}_\mathbb{P}[s]| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\, s\, z}\, \mathbb{f}_\mathbb{P}[z]\, dz \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}_\mathbb{P}[z]\, dz = 1 = \mathcal{F}_\mathbb{P}[0]$$

Aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt daraus, dass die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_\mathbb{P}$ einer stetigen Verteilung in ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist und dabei die Operationen Differenziation und Integration vertauscht werden dürfen.

Im Prinzip lässt sich die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_\mathbb{P}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ mit der Verteilungsdichte $\mathbb{f}_\mathbb{P}$ mit Hilfe von *Mathematica* ermitteln, indem man einfach das in der Definition auftretende Integral auswertet. Einfacher geht es, wenn man dazu den in *Mathematica* implementierten Befehl FourierTransform verwendet. Handelt es sich bei der stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ um eine in *Mathematica* implementierte Verteilung, so lässt sich die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_\mathbb{P}$ von $\mathbb{P}$ auch unter Verwendung von CharacteristicFunction bestimmen:

■ FourierTransform[$\mathbb{f}_\mathbb{P}[z]$, z, s] $\sqrt{2\pi}$

liefert die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_\mathbb{P}[s]$ der stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ mit Verteilungsdichte $\mathbb{f}_\mathbb{P}[z]$. Man beachte, dass der von *Mathematica* mit dem Befehl FourierTransform ermittelte Ausdruck noch mit $\sqrt{2\pi}$ multipliziert werden muss, um die im Rahmen der Stochastik verwendete Version der Fourier-Transformierten zu erhalten.

■ CharacteristicFunction[*distribution*, s]

liefert die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_\mathbb{P}[s]$ der stetigen, in *Mathematica* implementierten Verteilung *distribution*.

Wir wollen nun die Fourier-Transformierte von einigen wichtigen, in *Mathematica* implementierten stetigen Verteilungen ermitteln (man beachte, dass sich die Fourier-Transformierte vieler Verteilungen nicht mit Hilfe elementarer Funktionen ausdrücken lässt):

20.3.3 Beispiel: Man ermittle die Fourier-Transformierte der Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{a, b\}]$.

▼

Lösung: Wegen

CharacteristicFunction[UniformDistribution[{a, b}], s]

$$-\frac{\mathrm{i}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a\,s}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b\,s}\right)}{(-a+b)\,s}$$

besitzt die Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{a, b\}]$ die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}[\{a,b\}]}[s] = \int_a^b e^{i\,s\,z}\,\frac{1}{b-a}\,dz = \frac{i\,(e^{i\,a\,s}-e^{i\,b\,s})}{s\,(b-a)}$$

20.3.4 Beispiel: Man ermittle die Fourier-Transformierte der Dreiecksverteilung $\mathcal{D}[\{a, b\}]$.

▼

Lösung: Wegen

CharacteristicFunction[TriangularDistribution[{a, b}], s]

$$-\frac{4\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,a\,s}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,b\,s}{2}}\right)^2}{(a-b)^2\,s^2}$$

besitzt die Dreiecksverteilung $\mathcal{D}[\{a, b\}]$ die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}[\{a,b\}]}[s] = \int_a^{(a+b)/2} e^{i\,s\,z}\,\frac{4\,(z-a)}{(b-a)^2}\,dz + \int_{(a+b)/2}^b e^{i\,s\,z}\,\frac{4\,(b-z)}{(b-a)^2}\,dz = -\frac{4\,(e^{i\,a\,s/2}-e^{i\,b\,s/2})^2}{s^2\,(b-a)^2}$$

20.3.5 Beispiel: Man ermittle die Fourier-Transformierte der Laplaceverteilung $\mathcal{L}[\alpha, \lambda]$.

▼

Lösung: Wegen

CharacteristicFunction[LaplaceDistribution[α, λ], s]

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,s\,\alpha}}{1+s^2\,\lambda^2}$$

besitzt die Laplaceverteilung $\mathcal{L}[\alpha, \lambda]$ die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}[\alpha,\lambda]}[s] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,s\,z}\,\frac{1}{2\,\lambda}\,e^{-|z-\alpha|/\lambda}\,dz = \frac{e^{i\,\alpha\,s}}{1+\lambda^2\,s^2}$$

20.3.6 Beispiel: Man ermittle die Fourier-Transformierte der Normalverteilung $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$.

▼

Lösung: Wegen

CharacteristicFunction[NormalDistribution[μ, σ], s]

$$e^{i\, s\, \mu - \frac{s^2\, \sigma^2}{2}}$$

besitzt die Normalverteilung $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}_{\mathcal{N}[\mu,\sigma]}[s] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,s\,z}\, \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;\sigma}\, e^{-(z-\mu)^2/(2\,\sigma^2)}\, dz = e^{i\,\mu\,s}\; e^{-\sigma^2\, s^2/2}$$

20.3.7 Beispiel: Man ermittle die Fourier-Transformierte der Extremwertverteilung $\mathcal{E}xtrem[\mu, \beta]$.

▼

Lösung: Wegen

CharacteristicFunction[ExtremeValueDistribution[μ, β], s]

$$e^{i\, s\, \mu}\; \text{Gamma}[1 - i\, s\, \beta]$$

besitzt die Extremwertverteilung $\mathcal{E}xtrem[\mu, \beta]$ die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}xtrem[\mu,\beta]}[s] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,s\,z}\, \frac{1}{\beta}\, e^{(\mu-z)/\beta - e^{(\mu-z)/\beta}}\, dz = e^{i\,\mu\,s}\; \Gamma[1 - i\,\beta\,s]$$

Die Fourier-Transformation besitzt eine Reihe von interessanten Eigenschaften. Ohne auf den Beweis näher eingehen zu können, beginnen wir wieder mit der sogenannten

20.3.8 Satz (Umkehrformel): Ist $\mathbb{P}$ eine stetige Verteilung mit Verteilungsdichte $\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}$, so gilt für alle $z \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}[z] = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,s\,z}\, \mathcal{F}_{\mathbb{P}}[s]\, ds$$

Eine stetige Verteilung $\mathbb{P}$ ist somit durch ihre Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ vollständig bestimmt - oder anders ausgedrückt - die Fourier-Transformierten zweier stetiger Verteilungen stimmen genau dann überein, wenn die beiden Verteilungen überein stimmen.

Im Prinzip lässt sich die Verteilungsdichte $\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ aus der Fourier-Transformierten $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ mit Hilfe von *Mathematica* ermitteln, indem man einfach dieses Integral auswertet. Einfacher geht es, wenn man dazu den in *Mathematica* implementierten Befehl InverseFourierTransform verwendet:

■ InverseFourierTransform[$\mathcal{F}_{\mathbb{P}}[s]$, s, z] $/\sqrt{2\,\pi}$

berechnet die Verteilungsdichte $\mathfrak{f}_{\mathbb{P}}$ jener stetigen Verteilung $\mathbb{P}$, welche die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ besitzt. Man beachte, dass der von *Mathematica* mit dem Befehl InverseFourierTransform ermittelte Ausdruck noch durch $\sqrt{2\,\pi}$ dividiert werden muss, um die gesuchte Verteilungsdichte zu erhalten.

Wir zeigen die Verwendung der Befehle FourierTransform und InverseFourierTransform an einem Beispiel (man beachte wieder, dass diese beiden Befehle leider oft nicht zum Ziel führen, da *Mathematica* die dabei auftretenden Integrale nur in seltenen Fällen berechnen kann):

20.3.9 Beispiel: Für die Normalverteilung berechne man die Fourier-Transformierte mit Hilfe des Befehls FourierTransform. Anschließend ermittle man aus dieser Fourier-Transformierten wieder die Verteilungsdichte der Normalverteilung unter Verwendung des Befehls InverseFourierTransform.

▼

Lösung: Die Normalverteilung $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ besitzt die Verteilungsdichte

```
f[z_] := PDF[NormalDistribution[μ, σ], z]; f[z]
```

$$\frac{e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

a) Wendet man auf diese Verteilungsdichte den Befehl FourierTransform an und multipliziert man das Ergebnis mit $\sqrt{2\pi}$, so erhält man die Fourier-Transformierte der Normalverteilung:

```
ft[s_] := FourierTransform[f[z], z, s, Assumptions -> {σ > 0}] Sqrt[2 π]; ft[s]
```

$$e^{i s \mu - \frac{s^2 \sigma^2}{2}}$$

b) Wendet man auf diese Fourier-Transformierte den Befehl InverseFourierTransform an und dividiert man das Ergebnis durch $\sqrt{2\pi}$, so erhält man wieder die Verteilungsdichte der Normalverteilung:

```
InverseFourierTransform[ft[s], s, z, Assumptions → {σ > 0}] / Sqrt[2 π]
```

$$\frac{e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

```
Clear[f, ft]
```

Analog zu Satz 20.2.11 und Satz 20.2.12 zeigt man

20.3.10 Satz: Ist Z eine stetige Zufallsvariable, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, welche die Eigenschaft besitzen, dass die n-te Potenz von Z integrierbar ist

$$\mathbb{E}[Z^n] = (-i)^n \mathcal{F}_Z^{(n)}[0]$$

Ist Z integrierbar bzw quadratisch integrierbar, so gilt speziell

$$\mathbb{E}[Z] = -i\,\mathcal{F}_Z'[0] \quad \text{bzw} \quad \mathbb{V}[Z] = -\mathcal{F}_Z''[0] + (\mathcal{F}_Z'[0])^2$$

20.3.11 Satz: Sind die beiden stetigen Zufallsvariablen X und Y unabhängig, so gilt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_{X+Y}[s] = \mathcal{F}_X[s]\,\mathcal{F}_Y[s]$$

Für zwei beliebige stetige Verteilungen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ gilt damit

$$\mathcal{F}_{\mathbb{P}*\mathbb{Q}}[s] = \mathcal{F}_{\mathbb{P}}[s]\,\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}[s]$$

Es folgen wieder einige Beispiele:

20.3.12 Beispiel: Man zeige: Eine stetige Zufallsvariable Z besitzt genau dann eine symmetrische Verteilungsdichte, wenn ihre Fourier-Transformierte reell ist.

▼

Lösung: a) Besitzt Z eine symmetrische Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$, so gilt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_Z[s] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i s z}\,\mathbb{f}_Z[z]\,dz = \int_{-\infty}^{0} e^{i s z}\,\mathbb{f}_Z[z]\,dz + \int_{0}^{\infty} e^{i s z}\,\mathbb{f}_Z[z]\,dz =$$

$$= \int_{0}^{\infty} (e^{-i s z} + e^{i s z})\,\mathbb{f}_Z[z]\,dz = 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{Cos}[s\,z]\,\mathbb{f}_Z[z]\,dz \in \mathbb{R}$$

b) Ist die Fourier-Transformierte von Z reell, so gilt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_Z[s] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Cos}[s\,z]\,\mathbb{f}_Z[z]\,dz \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sin}[s\,z]\,\mathbb{f}_Z[z]\,dz = 0$$

und damit

$$\mathcal{F}_{-Z}[s] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i s z}\,\mathbb{f}_{-Z}[z]\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Cos}[s\,z]\,\mathbb{f}_{-Z}[z]\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sin}[s\,z]\,\mathbb{f}_{-Z}[z]\,dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Cos}[-s\,z]\,\mathbb{f}_Z[-z]\,dz - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sin}[-s\,z]\,\mathbb{f}_Z[-z]\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Cos}[s\,z]\,\mathbb{f}_Z[z]\,dz = \mathcal{F}_Z[s]$$

Die Fourier-Transformierten von Z und $-Z$ stimmen überein, also besitzen Z und $-Z$ die gleiche Verteilung, womit gezeigt ist, dass die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ von Z symmetrisch ist.

20.3.13 Beispiel: Für die Fourier-Transformierten der beiden Zufallsvariablen X bzw Y gilt

$$\mathcal{F}_X[s] = \frac{1 + i\,s}{1 + s^2} \quad \text{bzw} \quad \mathcal{F}_y[s] = \frac{1 - i\,s}{1 + s^2}$$

Gesucht sind ihre Verteilungsdichten $\mathbb{f}_X$ bzw $\mathbb{f}_Y$.

▼

Lösung: Der Befehl InverseFourierTransform liefert (nach langer Rechnung)

```
InverseFourierTransform[(1 + i s)/(1 + s^2), s, z, Assumptions → {z ≥ 0}]/Sqrt[2 π]
InverseFourierTransform[(1 + i s)/(1 + s^2), s, z, Assumptions → {z < 0}]/Sqrt[2 π]
```

```
e^-z

0
```

und

```
InverseFourierTransform[(1 - ⅈ s)/(1 + s^2), s, z, Assumptions → {z ≥ 0}]/Sqrt[2 π]
InverseFourierTransform[(1 - ⅈ s)/(1 + s^2), s, z, Assumptions → {z < 0}]/Sqrt[2 π]
```

```
0
```

e^z

also gilt

$$f_X[z] = \begin{cases} e^{-z} & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw} \quad f_Y[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z > 0 \\ e^z & \text{sonst} \end{cases}$$

20.3.14 Beispiel: Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien vollständig unabhängig und identisch verteilt mit der (für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gleichen) Verteilungsdichte

$$f_X[x] = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$$

Gesucht ist die Verteilungsdichte f_Z ihrer Summe $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

▼

Lösung: a) Wir überprüfen zuerst, ob es sich bei der positiven Funktion f_X tatsächlich um eine Verteilungsdichte handelt:

```
Integrate[1/(π (1 + x^2)), {x, -∞, ∞}]
```

```
1
```

b) Für die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}_Z[s]$ von Z gilt wegen Satz 20.3.11

$$\mathcal{F}_Z[s] = \mathcal{F}_{X_1}[s]\, \mathcal{F}_{X_2}[s] \ldots \mathcal{F}_{X_1}[s]$$

Unter Verwendung der Befehle FourierTransform und InverseFourierTransform lässt sich die gesuchte Verteilungsdichte f_Z von Z damit leicht ermitteln:

```
ft[s_] := FourierTransform[1/(π (1 + x^2)), x, s] Sqrt[2 π]
InverseFourierTransform[(ft[s])^n, s, z]/Sqrt[2 π]
Clear[ft]
```

$$\frac{n}{\pi\left(n^2 + z^2\right)}$$

20.4 Die charakteristische Funktion

Wir beginnen wieder mit einer Definition:

20.4.1 Definition: Ist $\mathbb{P}$ eine diskrete bzw stetige Verteilung mit der Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$, so heißt die durch

$$C_{\mathbb{P}}[s] = \sum_{z\in\mathbb{T}_{\mathbb{P}}} e^{i\,s\,z}\,\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z] \quad \text{bzw} \quad C_{\mathbb{P}}[s] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,s\,z}\,\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z]\,dz$$

auf $\mathbb{R}$ definierte komplexwertige Funktion $C_{\mathbb{P}}$, die charakteristische Funktion der Verteilung $\mathbb{P}$. Unter der charakteristischen Funktion C_Z einer diskreten bzw stetigen Zufallsvariablen Z versteht man die charakteristische Funktion ihrer Verteilung $\mathbb{P}_Z$.

▼

Ist $\mathbb{P}$ eine beliebige Verteilung mit der Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$, so definiert man ganz allgemein

$$C_{\mathbb{P}}[s] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,s\,z}\,\mathbb{F}_Z[dz]$$

wobei das dabei auftretende Integral als Lebesque-Stieltjes-Integral zu verstehen ist.

Im Prinzip lässt sich die charakteristische Funktion $C_{\mathbb{P}}$ einer diskreten bzw stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ mit der Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ mit Hilfe von *Mathematica* ermitteln, indem man einfach die in der Definition auftretende Summe bzw das dort auftretende Integral auswertet. Handelt es sich bei der diskreten bzw stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ um eine in *Mathematica* implementierte Verteilung, so lässt sich die charakteristische Funktion $C_{\mathbb{P}}$ von $\mathbb{P}$ in vielen Fällen auch unter Verwendung des Befehls CharacteristicFunction bestimmen:

■ CharacteristicFunction[*distribution, s*]

liefert die charakteristische Funktion $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}[s]$ der diskreten bzw stetigen, in *Mathematica* implementierten Verteilung *distribution*.

20.4.2 Bemerkung: Zwischen der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ einer diskreten Verteilung $\mathbb{P}$, deren Träger eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ist bzw der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$, deren Träger eine Teilmenge von $[0,\infty[$ ist bzw der Fourier-Transformierten $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ sowie der charakteristischen Funktion $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ von $\mathbb{P}$ gelten die folgenden Beziehungen:

$$\mathcal{G}_{\mathbb{P}}[s] = \mathcal{C}_{\mathbb{P}}[-i \operatorname{Log}[s]] \quad \text{bzw} \quad \mathcal{L}_{\mathbb{P}}[s] = \mathcal{C}_{\mathbb{P}}[i\, s] \quad \text{bzw} \quad \mathcal{F}_{\mathbb{P}}[s] = \mathcal{C}_{\mathbb{P}}[s]$$

Aus der Definition der charakteristischen Funktion folgt unmittelbar:

20.4.3 Bemerkung: Besteht zwischen den beiden Zufallsvariablen X und Y die Beziehung $Y = a + b\,X$, so gilt

$$\mathcal{C}_Y[s] = \mathbb{E}[e^{i\,Y\,s}] = \mathbb{E}[e^{i\,(a+b\,X)\,s}] = e^{i\,a\,s}\,\mathcal{C}_X[b\,s]$$

Die charakteristische Funktion besitzt eine Reihe von tiefliegenden Eigenschaften, welche in erster Linie für theoretische Untersuchungen von Bedeutung sind. Wir erwähnen diese Eigenschaften ohne Beweise:

20.4.4 Satz: Eine Verteilung $\mathbb{P}$ ist durch ihre charakteristische Funktion $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ vollständig bestimmt - oder anders ausgedrückt - die charakteristischen Funktionen zweier Verteilungen stimmen genau dann überein, wenn die beiden Verteilungen überein stimmen.

Die charakteristische Funktion wird vor allem im Zusammenhang mit einer - auch für die Praxis sehr wichtigen - Konvergenzart verwendet:

20.4.5 Definition:

a) Die Folge $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungen konvergiert schwach gegen die Verteilung $\mathbb{P}$, wenn für alle $z \in \mathbb{R}$, in denen $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ stetig ist, die Folge $(\mathbb{F}_{\mathbb{P}_n}[z])_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}[z]$ konvergiert.

b) Die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen konvergiert in Verteilung gegen die Zufallsvariable Z, wenn die Folge $(\mathbb{P}_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Verteilungen schwach gegen die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ von Z konvergiert.

Der direkte Nachweis der schwachen Konvergenz einer Folge von Verteilungen ist oft recht mühsam. In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz von großer Bedeutung:

20.4.6 Satz: Die Folge $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungen konvergiert genau dann schwach gegen die Verteilung $\mathbb{P}$, wenn die Folge $(\mathcal{C}_{\mathbb{P}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer charakteristischen Funktionen punktweise gegen die charakteristische Funktion $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ von $\mathbb{P}$ konvergiert.

An zwei Beispielen wollen wir die Anwendung dieses Satzes sowie die Bedeutung der schwachen Konvergenz insgesamt demonstrieren:

20.4.7 Beispiel: Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen aus dem Intervall $]0,1[$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $(n\,p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $\lambda>0$ konvergiert. Man zeige, dass dann die Folge $(\mathcal{B}[n,\ p_n])_{n\in\mathbb{N}}$ der Binomialverteilungen schwach gegen die Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$ konvergiert. Damit ist gezeigt, dass sich für große n und kleine p die Binomialverteilung $\mathcal{B}[n,\ p]$ durch die Poissonverteilung $\mathcal{P}[n\ p]$ approximieren lässt.

▼

Lösung: Für die charakteristische Funktion der Binomialverteilung $\mathcal{B}[n,\ p_n]$ bzw der Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$ gilt

```
CharacteristicFunction[BinomialDistribution[n, pn], s]
CharacteristicFunction[PoissonDistribution[λ], s]
```

$$\left(1-p_n+e^{i\,s}\,p_n\right)^n$$

$$e^{\left(-1+e^{i\,s}\right)\lambda}$$

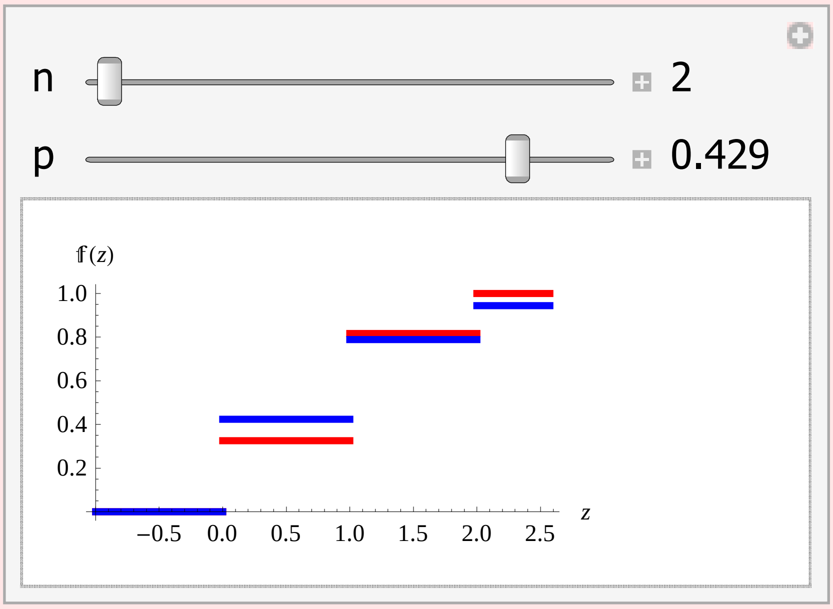
Nun gilt aber offenbar für alle $s\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}(1-p_n+e^{i\,s}\,p_n)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n\,p_n\,(e^{i\,s}-1)}{n}\right)^n=e^{\lambda\,(e^{i\,s}-1)}$$

womit unsere Behauptung wegen Satz 20.4.6 gezeigt ist.

Wir wollen die Behauptung, dass sich für große n und kleine p die Binomialverteilung $\mathcal{B}[n,\ p]$ durch die Poissonverteilung $\mathcal{P}[n\ p]$ approximieren lässt, auch graphisch veranschaulichen:

```
Manipulate[Plot[{CDF[BinomialDistribution[n, p], z], CDF[PoissonDistribution[n p], z]}, {z, −1, 3 n p},
    PlotStyle → {{Thickness[0.015], Red}, {Thickness[0.015], Blue}}, PlotPoints → 100,
    AspectRatio → 0.5, AxesOrigin → {−1, 0}, PlotRange → All, AxesLabel → {z, f[z]},
    ImageSize → {200, 120}],
  {n, 2, 50, 1, Appearance → "Labeled"}, {{p, 0.5}, 0.03, 0.5, Appearance → "Labeled"}]
```



20.4.8 Beispiel: Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $Z_n=(Y_n-n\,p)/\sqrt{n\,p\,(1-p)}$, wobei Y_n eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsvariable bezeichnet. Man zeige, dass die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen eine

$\mathcal{N}[0, 1]$-verteilte Zufallsvariable Z konvergiert. Damit ist gezeigt, dass sich für große n die Binomialverteilung $\mathcal{B}[n, p]$ durch die Normalverteilung $\mathcal{N}[n\,p, \sqrt{n\,p\,(1-p)}\,]$ approximieren lässt.

▼

Lösung: Für die charakteristische Funktion der Binomialverteilung $\mathcal{B}[n, p_n]$ bzw der Normalverteilung $\mathcal{N}[0, 1]$ gilt

```
CharacteristicFunction[BinomialDistribution[n, p], s]
CharacteristicFunction[NormalDistribution[0, 1], s]
```

$$\left(1 - p + e^{i\,s}\,p\right)^n$$

$$e^{-\frac{s^2}{2}}$$

Wegen Bemerkung 20.4.3 gilt damit für die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen Z_n (wir verwenden die Abkürzung $q = 1 - p$ und entwickeln die auftretenden Exponentialfunktionen in eine Reihe)

$$C_{Z_n}[s] = \mathrm{Exp}[-i\,n\,p\,s/\sqrt{n\,p\,q}\,]\,(1 - p + p\,\mathrm{Exp}[i\,s/\sqrt{n\,p\,q}\,])^n =$$

$$= (q\,\mathrm{Exp}[-i\,p\,s/\sqrt{n\,p\,q}\,] + p\,\mathrm{Exp}[i\,q\,s/\sqrt{n\,p\,q}\,])^n =$$

$$= (1 - p\,s^2/(2\,n) - q\,s^2/(2\,n) + o[1/n])^n = (1 - \frac{s^2}{2\,n} + o[1/n])^n$$

Mit $o[1/n]$ bezeichnen wir dabei einen Ausdruck, welcher die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty}(n\,o[1/n]) = 0$ besitzt. Damit gilt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} C_{Z_n}[s] = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{s^2}{2\,n} + o[1/n])^n = e^{-s^2/2} = C_Z[s]$$

womit unsere Behauptung wegen Satz 20.4.6 gezeigt ist.

Wir wollen die Behauptung, dass sich für große n die Binomialverteilung $\mathcal{B}[n, p]$ durch die Normalverteilung $\mathcal{N}[n\,p, \sqrt{n\,p\,(1-p)}\,]$ approximieren lässt, auch graphisch veranschaulichen und dabei die maximale Differenz zwischen den beiden Verteilungsfunktionen ermitteln (bei der Berechnung der maximalen Differenz achte man darauf, dass die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung eine linksseitig stetige Stufenfunktion ist):

```
Manipulate[Show[With[{σ = Sqrt[n p (1 − p)]},
      {Plot[{CDF[BinomialDistribution[n, p], z], CDF[NormalDistribution[n p, σ], z]}, {z, n p − 2 σ, n p + 2 σ},
          PlotStyle → {{Thickness[0.01], Red}, {Thickness[0.01], Blue}}, PlotPoints → 100,
          AspectRatio → 0.5, AxesOrigin → {n p, 0}, PlotRange → All, AxesLabel → {z, f[z]},
          ImageSize → {230, 130}],
        Graphics[{{Red, Text["Differenz:", Scaled[{0.65, 0.3}]],
              Text[Max[Join[
                    Table[Abs[CDF[BinomialDistribution[n, p], z] − CDF[NormalDistribution[n p, σ], z]],
                      {z, 0, n}],
                    Table[Abs[CDF[BinomialDistribution[n, p], z − 1] − CDF[NormalDistribution[n p, σ], z]],
                      {z, 0, n}]]],
                Scaled[{0.87, 0.3}]]}}]}]],
  {n, 1, 1000, 1, Appearance → "Labeled"}, {p, 0.1, 0.9, Appearance → "Labeled"}]
```