§21 Der Bernoulliprozess

▼

```
Needs["MultivariateStatistics`"]

BernoulliProzess[n_, p_] := Module[{liste, posliste, m, punkte},
    liste = RandomInteger[BinomialDistribution[1, p], {n}];
    posliste = Flatten[Position[liste, 1]];
    m = Length[posliste];
    punkte = Table[Graphics[{PointSize[0.015], Red, Point[{posliste[[i]], 0}]}], {i, 1, m}];
    Print[liste];
    Show[{punkte}, Axes → {True, False}, AxesOrigin → {−1, 0}, AspectRatio → 0.03, PlotRange → {{0, n}, {−0.1, 0.
```

Wir haben uns bereits ausführlich damit befasst, die Verteilung (also die Verteilungsdichte bzw die Verteilungsfunktion) einer Zufallsvariablen Z zu ermitteln. In diesem und den drei folgenden Kapiteln werden wir uns mit der Frage befassen, in welchen Situationen die in Mathematica implementierten Verteilungen (es handelt sich dabei um die wesentlichsten Verteilungen der Stochastik) auftreten. Wir werden dabei sehen, dass manche dieser Verteilungen untereinander eng zusammenhängen und damit eine Art "Familie von Verteilungen" bilden.

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem sogenannten Bernoulliprozess und den damit eng zusammenhängenden Verteilungen. Es handelt sich dabei um die Binomialverteilung, die negative Binomialverteilung und die hypergeometrische Verteilung sowie die Multinomialverteilung als mehrdimensionale Verallgemeinerung der Binomialverteilung. Wir werden ausführlich darauf eingehen, bei welchen Fragestellungen diese Verteilungen auftreten und welche Eigenschaften diese Verteilungen besitzen. Außerdem werden wir an Hand von zahlreichen Beispielen zeigen, wie mit diesen Verteilungen gearbeitet wird.

21.1 Der Bernoulliprozess

Wir beginnen mit einer zentralen Begriffsbildung:

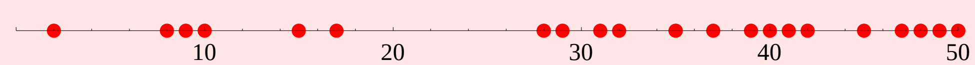
21.1.1 Definition: Wir betrachten ein Zufallsexperiment, bei dem ein gewisses Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p eintreten kann (tritt das Ereignis A ein, so spricht man von einem Erfolg). Wird dieses Zufallsexperiment laufend unabhängig wiederholt, so sagt man, es liegt ein Bernoulliprozess mit Parameter p vor.

Beispiele für Bernoulliprozesse sind
- das wiederholte Werfen einer Münze oder eines Würfels;
- das wiederholte Ziehen mit Zurücklegen von Kugeln aus einer Urne;
- das laufende Befragen von zufällig ausgewählten Personen (Meinungsumfrage);
- das laufende Überprüfen der Qualität eines Produktionsprozesses (Qualitätskontrolle).

Mit dem Befehl BernoulliProzess[n, p] lässt sich eine zufällige Realisierung ω eines Bernoulliprozesses erzeugen. Der erste Parameter n gibt dabei an, wie oft das Zufallsexperiment wiederholt wird, der zweite Parameter p beschreibt die Erfolgswahrscheinlichkeit. Die Einser bzw die roten Punkte entsprechen jenen Wiederholungen, in denen das Ereignis A eintritt, also ein Erfolg zu verzeichnen ist.

```
BernoulliProzess[50, 1/3]
```

```
{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1}
```



Mit einem Bernoulliprozess mit Parameter p sind eine Reihe von Zufallsvariablen bzw Verteilungen eng verbunden. Wir werden nun diese Zufallsvariablen zusammen mit ihren Eigenschaften und Verteilungen angeben und diese Verteilungen in den folgenden Abschnitten im Detail besprechen:

21.1.2 Definition: Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots\}$ sei

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls bei der } i-\text{ten Wiederholung ein Erfolg eintritt} \\ 0 & \text{falls bei der } i-\text{ten Wiederholung kein Erfog eintritt} \end{cases}$$

Die diskreten Zufallvariablen $X_1, X_2, \ldots$ sind offenbar vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{B}[1, p]$-verteilt. Wenn man von einem Bernoulliprozess mit Parameter p spricht, so versteht man in der Stochastik darunter oft diese Familie $\mathfrak{X} = \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von vollständig unabhängigen, identisch $\mathcal{B}[1, p]$-verteilten Zufallsvariablen.

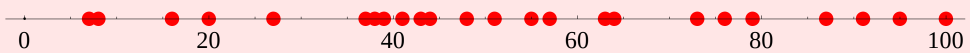
21.1.3 Beispiel: Mit einem Würfel wird $n = 100$ mal gewürfelt und das Auftreten eines Sechsers beobachtet. Man simuliere eine typische Realisierung.

▼

Lösung: Beim laufenden Würfeln mit einem homogenen Würfel und der anschließenden Beobachtung, ob ein Sechser gewürfelt wurde, handelt es sich um einen Bernoulliprozess mit Parameter $p = 1/6$. Die Simulation einer typischen Realisierung kann daher mit dem Befehl BernoulliProzess[100, 1/6] erfolgen:

```
BernoulliProzess[100, 1/6]
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0,
 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1}
```



Im Folgenden sei $\mathfrak{X} = \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein Bernoulliprozess mit Parameter p.

21.1.4 Definition: Für jedes $n \in \{1, 2, \ldots\}$ gibt die Zufallsvariable

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

die Anzahl der Erfolge bei den ersten n Wiederholungen an. Da die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{B}[1, p]$-verteilt sind, folgt aus der Formel von Bernoulli (aber auch aus der Faltungsformel für Binomialverteilungen), dass die Zufallsvariable Z_n einer $\mathcal{B}[n, p]$-Verteilung genügt.

In den beiden Familien $\mathfrak{X} = \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{Z} = \{Z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ steckt die gleiche Information. Daher versteht man in der Stochastik unter einem Bernoulliprozess mit Parameter p gelegentlich auch diese Familie $\mathfrak{Z} = \{Z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{B}[n, p]$-verteilten Zufallsvariablen.

21.1.5 Definition: Für jedes $n \in \{1, 2, \ldots\}$ gibt die Zufallsvariable

$$Y_n = \text{Min}\,\{k \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{i=1}^{k} X_i = n\} - n$$

die Anzahl der Misserfolge vor dem n-ten Erfolg an. Da die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{B}[1, p]$-verteilt sind, folgt aus Beispiel 11.2.3, dass die Zufallsvariable Y_n einer $\mathcal{NB}[n, p]$-Verteilung genügt.

▼

In der Literatur verwendet man gelegentlich an Stelle der Anzahl der Misserfolge Y_n vor dem n-ten Erfolg die Anzahl der Wiederholungen $Y_n^* = Y_n + n$ bis zum n-ten Erfolg und spricht im Zusammenhang mit der Verteilung dieser Zufallsvariablen Y_n^* ebenfalls von einer negativen Binomialverteilung. Man achte daher genau darauf, in welchem Zusammenhang der Begriff "negative Binomialverteilung" jeweils verwendet wird.

Beim Arbeiten mit Bernoulliprozessen sind manchmal die beiden folgenden Bemerkungen von Bedeutung:

> **21.1.6 Bemerkung:** Für alle $n_1 < n_2 < n_3 \ldots \in \mathbb{N}$ sind die Zuwächse $Z_{n_1}, Z_{n_2} - Z_{n_1}, Z_{n_3} - Z_{n_2}, \ldots$ vollständig unabhängig und binomialverteilt mit den Parametern $n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, \ldots$ und p.

▼

Beweis: Diese Behauptung folgt unmittelbar aus der Familieneigenschaft von vollständig unabhängigen Zufallsvariablen zusammen mit der Faltungsformel für Binomialverteilungen.

> **21.1.7 Bemerkung:** Die Anzahl der Misserfolge $Y_1, Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \ldots$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Erfolgen sind vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{NB}[1, p]$-verteilt.

▼

Beweis: Wir zeigen exemplarisch, dass die beiden Zufallsvariablen Y_1 und $Y_2 - Y_1$ $\mathcal{NB}[1, p]$-verteilt und unabhängig sind. Für alle $k, l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ gilt

$$\mathbb{P}[\{Y_1 = k\} \cap \{Y_2 - Y_1 = l\}] =$$

$$= \mathbb{P}[\{X_1 = 0\} \cap \ldots \cap \{X_k = 0\} \cap \{X_{k+1} = 1\} \cap \{X_{k+2} = 0\} \cap \ldots \cap \{X_{k+l+1} = 0\} \cap \{X_{k+l+2} = 1\}] =$$

$$= p\,(1-p)^k\; p\,(1-p)^l$$

Das hat aber wegen

$$\mathbb{P}[\{Y_2 - Y_1 = l\}] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{Y_1 = j\} \cap \{Y_2 - Y_1 = l\}] = \sum_{j=0}^{\infty} p\,(1-p)^j\; p\,(1-p)^l = p\,(1-p)^l$$

unmittelbar zur Folge, dass nicht nur Y_1 (das ist ohnehin bekannt), sondern auch $Y_2 - Y_1$ einer $\mathcal{NB}[1, p]$-Verteilung genügt und damit die beiden Zufallsvariablen Y_1 und $Y_2 - Y_1$ unabhängig sind.

21.2 Die Binomialverteilung $\mathcal{B}[n,\ p]$

Wir fassen die bereits bekannten Eigenschaften der Binomialverteilung $\mathcal{B}[n,\ p]$ zusammen:

21.2.1 Bemerkung: Die Binomialverteilung $\mathcal{B}[n,\ p]$ besitzt den Träger

$$\mathbb{T} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

die Verteilungsdichte

$$\mathbb{f}[z] = \begin{cases} \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z} & \text{für } z \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Verteilungsfunktion

$$\mathbb{F}[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor z \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \mathrm{B}_r[1-p,\ n-\lfloor z \rfloor,\ 1+\lfloor z \rfloor] & \text{für } z \geq 0 \end{cases}$$

Eine $\mathcal{B}[n,\ p]$-verteilte Zufallsvariable Z besitzt den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[Z] = n\, p$$

und die Varianz

$$\mathbb{V}[Z] = n\, p\, (1-p)$$

Für Binomialverteilungen mit dem gleichen! Parameter p gilt die Faltungsformel

$$\mathcal{B}[m,\ p] * \mathcal{B}[n,\ p] = \mathcal{B}[m+n,\ p]$$

Es folgen nun eine Reihe von Beispielen, mit denen gezeigt wird, wie sich die Binomialverteilung bei der Behandlung von konkreten Problemen einsetzen lässt:

21.2.2 Beispiel: In einer Urne befinden sich $r = 15$ rote und $s = 12$ schwarze Kugeln. Aus dieser Urne wird $n = 20$ mal mit Zurücklegen jeweils eine Kugel entnommen und beobachtet, wieviele rote Kugeln dabei insgesamt gezogen werden. Man simuliere $k = 100$ typische Realisierung dieser Beobachtung.

▼

Lösung: Beim laufenden Ziehen mit Zurücklegen von Kugeln aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln und der anschließenden Beobachtung, ob dabei eine rote Kugel gezogen wurde, handelt es sich um einen Bernoulliprozess mit Parameter $p = r/(r+s)$. Die Anzahl Z_n der roten Kugeln beim n maligen Ziehen ist damit binomialverteilt mit den Parametern n und $p = r/(r+s)$. Mit dem Befehl RandomInteger lassen sich leicht k typische Realisierung dieser Beobachtung simulieren:

```
r = 15; s = 12; n = 20; k = 100;
RandomInteger[BinomialDistribution[n, r/(r + s)], {k}]
Clear[r, s, n, k]
```

```
{9, 16, 12, 11, 11, 11, 8, 14, 11, 8, 13, 9, 13, 10, 14, 15, 13, 12, 14, 9,
 14, 15, 8, 13, 6, 13, 15, 9, 11, 13, 13, 13, 11, 13, 7, 13, 13, 12, 10, 13,
 11, 11, 10, 13, 9, 10, 10, 11, 10, 9, 10, 8, 10, 12, 13, 13, 15, 11, 9, 11,
 15, 13, 8, 10, 12, 12, 11, 10, 11, 14, 11, 14, 8, 12, 11, 12, 11, 10, 9, 11,
 13, 11, 6, 10, 9, 15, 14, 13, 13, 14, 14, 12, 11, 11, 13, 14, 15, 11, 10, 9}
```

21.2.3 Beispiel: Mit einem Würfel wird $n = 30$ mal gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei maximal $z = 3$ Sechser auftreten?

▼

Lösung: Beim laufenden Werfen eines (homogenen) Würfels und der anschließenden Beobachtung, ob dabei ein Sechser aufgetreten ist, handelt es sich um einen Bernoulliprozess mit Parameter $p = 1/6$. Die Anzahl Z_n der

Sechser beim n maligen Würfeln ist damit binomialverteilt mit den Parametern n und p. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z_n \leq z\}]$ gilt damit

```
n = 30; p = 1/6; z = 3;
CDF[BinomialDistribution[n, p], 3] // N
Clear[n, p, z]
```

```
0.23962
```

21.2.4 Beispiel: In einer Fabrik arbeitet jede von $n = 200$ Maschinen zu einem beliebigen Zeitpunkt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.95$ und ist mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0.05$ in Reparatur. Die einzelnen Maschinen arbeiten voneinander unabhängig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu einem gegebenen Zeitpunkt mindestens $m = 190$ Maschinen arbeiten?

▼

Lösung: Beim Überprüfen der einzelnen Maschinen, ob sie zum gegebenen Zeitpunkt arbeitet, handelt es sich um einen Bernoulliprozess mit Parameter p. Die Anzahl Z_n der Maschinen, die zum gegebenen Zeitpunkt arbeiten, ist damit binomialverteilt mit den Parametern n und p. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z_n \geq m\}]$ gilt daher

```
n = 200; p = 0.95; m = 190;
1 - CDF[BinomialDistribution[n, p], m - 1]
Clear[n, p, m]
```

```
0.583067
```

21.2.5 Beispiel: Im Unterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, mit einer Münze $n = 150$ mal zu werfen und das Ergebnis zu protokollieren. Max verzichtet auf das tatsächliche Münzwerfen und erfindet das folgende Protokoll (dabei steht 1 für das Ereignis "Adler" und 0 für das Ereignis "Zahl")

1,1,0,0,1,1,1,0,1,0, 1,1,0,1,1,0,1,0,1,0, 1,1,1,0,1,0,0,1,1,1, 1,0,1,1,0,1,1,0,1,0,
1,1,0,1,1,0,0,1,1,0, 1,0,1,1,0,0,1,1,0,0, 1,0,1,1,1,0,1,0,1,0, 1,1,0,1,0,1,1,0,0,1,
0,0,1,0,1,1,1,0,1,0, 1,1,0,1,1,0,0,1,0,1, 1,1,0,1,0,0,1,1,0,1, 0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,
0,1,1,1,0,1,0,1,1,0, 1,0,1,1,0,1,0,1,1,0, 0,1,0,1,1,0,0,1,0,0.

Warum ist der Lehrer davon überzeugt, dass Max geschwindelt hat?

▼

Lösung: Beim laufenden Werfen einer (homogenen) Münze und der anschließenden Beobachtung, ob dabei ein Adler aufgetreten ist, handelt es sich bekanntlich um einen Bernoulliprozess mit Parameter $p = 1/2$. Die Anzahl Z_n der Adler beim n maligen Werfen ist damit binomialverteilt mit den Parametern n und p. Es ist daher damit zu rechnen, dass in unserem konkreten Fall etwa $n\,p = 75$ Adler auftreten. Tatsächlich tritt in dem von Max abgegebenen Protokoll aber $z = 87$ mal ein Adler auf. Dieses Ergebnis macht den Lehrer stutzig. Er berechnet daher die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z_n \geq 87\}]$

```
n = 150; p = 1/2; z = 87;
1 - CDF[BinomialDistribution[n, p], z - 1] // N
Clear[n, p, z]
```

```
0.0300136
```

Da diese Wahrscheinlichkeit sehr klein ist, ist der Lehrer davon überzeugt, dass Max geschwindelt und dieses Protokoll erfunden und nicht durch tatsächliches Experimentieren erzeugt hat. Er nimmt dabei in Kauf, Max mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 % ungerechtfertigt zu beschuldigen.

Wir erzeugen durch Simulation ein vom Lehrer gewünschtes Protokoll und ermittelt mit Hilfe von Apply und Plus die Anzahl der dabei auftretenden Adler. Dabei erkennen wir, dass diese Anzahl tatsächlich meistens in der Nähe des Erwartungswerts $n\,p = 75$ liegt und nur sehr selten einen Wert größer als 86 annimmt.

```
Table[Random[BinomialDistribution[1, 1/2]], {150}]
Apply[Plus, %]
```

```
{0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1,
 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1,
 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0,
 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1}
```

```
84
```

21.2.6 Beispiel: Nachdem der Lehrer genau erklärt hat, warum er Max auf die Schliche gekommen ist, lässt er Max die Aufgabe wiederholen. Max ist noch immer zu faul, tatsächlich mit einer Münze zu werfen, passt nun aber peinlich genau darauf auf, dass die Anzahl der Adler "stimmt" und liefert das folgende Protokoll

1,0,1,1,0,1,0,0,1,0, 1,0,1,1,0,0,1,0,1,0, 1,0,0,1,0,1,1,0,1,0, 1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,
0,1,0,1,0,1,0,0,1,0, 1,1,0,1,0,1,1,0,1,0, 1,0,1,1,0,1,0,1,0,1, 0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,
0,1,0,0,1,0,1,0,1,1, 0,1,1,0,1,0,1,0,1,1, 0,1,0,1,0,1,1,0,1,0, 1,0,0,1,0,1,0,1,0,1,
1,0,0,1,0,0,1,0,1,0, 0,1,0,0,1,0,1,0,0,1, 1,0,1,0,0,1,1,0,1,0.

Warum kommt ihm der Lehrer auch diesmal auf die Schliche?

▼

Lösung: Beim laufenden Beobachten der "Vorzeichenwechsel" (also eines Wechsels von Adler zu Zahl oder umgekehrt) handelt es sich ebenfalls um einen Bernoulliprozess mit Parameter $p = 1/2$. Die Anzahl V_n dieser

Vorzeichenwechsel beim n maligen Werfen ist damit binomialverteilt mit den Parametern $n-1$ und p. Es ist daher damit zu rechnen, dass in unserem konkreten Fall etwa $(n-1)\,p = 74.5$ Vorzeichenwechsel auftreten. Tatsächlich treten in dem von Max abgegebenen Protokoll aber $v = 121$ Vorzeichenwechsel auf. Der Lehrer wird wieder stutzig und berechnet die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{V_n \geq 121\}]$:

```
n = 150; p = 1/2; v = 121;
1 - CDF[BinomialDistribution[n - 1, p], v - 1] // N
Clear[n, p, z]
```

```
2.77556×10^-15
```

Da diese Wahrscheinlichkeit extrem klein ist, ist der Lehrer davon überzeugt, dass Max wieder geschwindelt hat. (Es ist interessant zu bemerken, dass Finanzämter mit ähnlichen Methoden arbeiten, um zu überprüfen, ob die Steuererklärung von Betrieben "geschönt" ist.)

21.2.7 Beispiel: Bei jedem Versuch sei die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A gleich p. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dieses Ereignis bei n unabhängigen Wiederholungen geradzahlig oft auf?

▼

Lösung: Beim laufenden Überprüfen, ob das Ereignis A eintritt, handelt es sich um einen Bernoulliprozess mit Parameter p. Die Zufallsvariable Z_n, welche angibt, wie oft dieses Ereignis bei n Wiederholungen auftritt, ist damit binomialverteilt mit den Parametern n und p. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt damit

$$\mathbb{P}[\{Z_n \text{ ist gerade}\}] = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2} (p^k + (-p)^k)(1-p)^{n-k} = \frac{1}{2}(1 + (1-2\,p)^n)$$

wobei wir die Summe mittels Sum und FullSimplify (unter Berücksichtigung von $0 \leq p \leq 1$) berechnet haben:

```
FullSimplify[Sum[Binomial[n, k] (p^k + (-p)^k) (1 - p)^(n-k)/2, {k, 0, n}], 0 ≤ p ≤ 1]
```

$$\frac{1}{2}\left(1 + (1-2\,p)^n\right)$$

21.2.8 Beispiel: Zwei gleich gute Schützen geben (unabhängig voneinander) je n Schüsse auf eine Schießscheibe ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Schützen die gleiche Anzahl von Treffern erzielen?

▼

Lösung: Für jeden der beiden Schützen bilden die Treffer einen Bernoulliprozess mit Parameter p. Die Trefferanzahlen $Z_n{}^{(1)}$ bzw $Z_n{}^{(2)}$ der beiden Schützen bei jeweils n Schüssen sind somit unabhängige, mit den Parametern n und p binomialverteile Zufallsvariable. Damit ergibt sich für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[\{Z_n{}^{(1)} = Z_n{}^{(2)}\}] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[\{Z_n{}^{(1)} = k\}]\,\mathbb{P}[\{Z_n{}^{(2)} = k\}]$$

Diese Summe lässt sich unter Verwendung von *Mathematica* für beliebige Werte von n und p auswerten:

```
n = 10; p = 1/3;
Sum[(PDF[BinomialDistribution[n, p], k])^2, {k, 0, n}] // N
Clear[n, p]
```

```
0.18751
```

21.2.9 Beispiel (Überbuchungen): Häufig ist die Zahl der zu einem Flug erschienenen Passagiere geringer als die Zahl der Buchungen für diesen Flug. Die Fluggesellschaften überbuchen daher den Flug (sie verkaufen also mehr Tickets als Sitze vorhanden sind) mit dem Risiko, eventuell überzählige Passagiere mit Geld entschädigen zu müssen. Wir nehmen an, dass die Fluggesellschaft bei jedem mitfliegenden Fluggast Einnahmen von $e = 300$ € und für jede überzählige Person einen Verlust von $v = 500$ € hat. Außerdem nehmen wir an, dass jede Person, die einen Platz gebucht hat, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.95$ auch tatsächlich zum Flug erscheint. Wieviele Plätze soll diese Fluggesellschaft bei einem Airbus mit $s = 364$ Sitzplätzen verkaufen, um den zu erwartenden Gewinn zu maximieren?

▼

Lösung: Falls die Fluggesellschaft n Plätze verkauft, ist die Anzahl Z der zum Flug tatsächlich erscheinenden Passagiere $\mathcal{B}[n, p]$-verteilt. Für den zu erwartenden Gewinn g_n gilt dann

$$g_n = \sum_{k=0}^{s} k\, e\, \mathbb{P}[\{Z = k\}] + \sum_{k=s+1}^{n} (s\, e - (k - s)\, v)\, \mathbb{P}[\{Z = k\}]$$

Wir bestimmen n mit Hilfe von *Mathematica* so, dass g_n maximal ist, was offenbar $n = 382$ zur Folge hat.

```
p = 0.95; e = 300; v = 500; s = 364;
Table[{n, Sum[k e PDF[BinomialDistribution[n, p], k], {k, 0, s}] +
      Sum[(s e − (k − s) v) PDF[BinomialDistribution[n, p], k], {k, s + 1, n}]}, {n, s, s + 20}]
Clear[p, e, v, s]
```

```
{{364, 103740.}, {365, 104025.}, {366, 104310.}, {367, 104595.},
 {368, 104880.}, {369, 105165.}, {370, 105450.}, {371, 105734.},
 {372, 106018.}, {373, 106300.}, {374, 106578.}, {375, 106848.},
 {376, 107106.}, {377, 107345.}, {378, 107555.}, {379, 107727.},
 {380, 107852.}, {381, 107919.}, {382, 107923.}, {383, 107861.}, {384, 107730.}}
```

In Beispiel 20.4.7 haben wir (unter Verwendung von charakteristischen Funktionen) gezeigt, dass sich für große n und kleine p die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung $\mathcal{B}[n, p]$ durch die Verteilungsfunktion der Poisson-verteilung $\mathcal{P}[n\, p]$ approximieren lässt. Wir zeigen nun, dass diese Approximation auch für die entsprechenden Verteilungsdichten gilt (da die Poissonverteilung $\mathcal{P}[n\, p]$ diskret ist, sind diese beiden Konvergenzen gleichwertig):

21.2.10 Satz (Gesetz der seltenen Ereignisse): Ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen aus dem Intervall $]\,0, 1[$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $(n\, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $\lambda > 0$ konvergiert, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n{}^k\, (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\alpha}\, \frac{\lambda^k}{k!}$$

▼

Beweis: Für alle $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n{}^k\, (1 - p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\, n^k}\, (n\, p_n)^k\, (1 - p_n)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})}_{=1} \ldots \underbrace{\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{k-1}{n})}_{=1} \underbrace{\lim_{n\to\infty} (n\, p_n)^k}_{=\alpha^k} \underbrace{\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{n\, p_n}{n})^n}_{=e^{-\alpha}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} (1 - p_n)^{-k}}_{=1} = e^{-\alpha}\, \frac{\alpha^k}{k!}$$

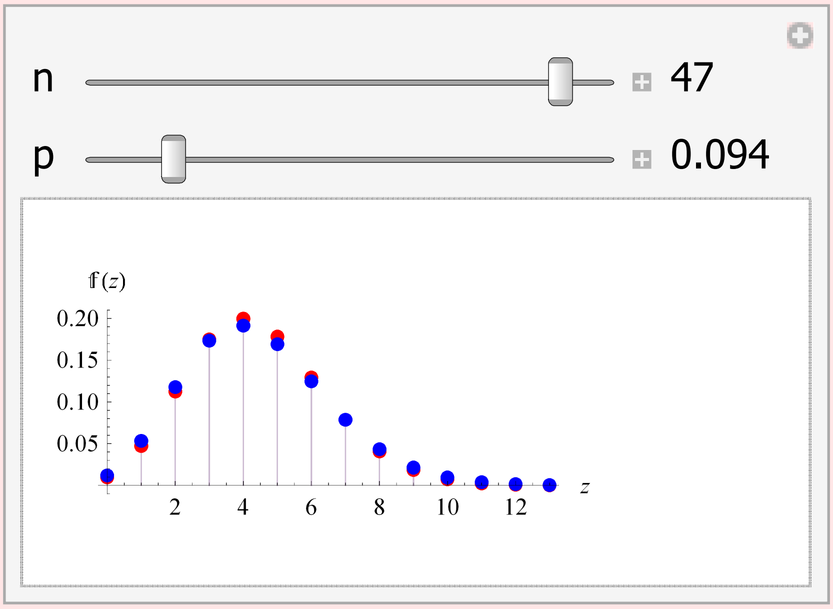
Wie gut diese Approximation der Verteilungsdichte der Binomialverteilung durch die Verteilungsdichte der Poissonverteilung funktioniert, wird mit dem folgende Beispiel demonstriert:

21.2.11 Beispiel: Für große n und kleine p vergleiche man graphisch die Verteilungsdichte der $\mathcal{B}[n, p]$-Verteilung mit der Verteilungsdichte der $\mathcal{P}[n\ p]$-Verteilung.

▼

Lösung: Wir plotten die Verteilungsdichten der $\mathcal{B}[n, p]$-Verteilung (rot) und der $\mathcal{P}[n\ p]$-Verteilung (blau) und erkennen, dass sich für große n und kleine p diese beiden Verteilungsdichten kaum unterscheiden.

```
Manipulate[λ = n p;
  ListPlot[{Table[{z, PDF[BinomialDistribution[n, p], z]}, {z, 0, 3 λ}],
     Table[{z, PDF[PoissonDistribution[n p], z]}, {z, 0, 3 λ}]},
   PlotStyle → {{PointSize[0.03], Red}, {PointSize[0.03], Blue}}, Filling → Axis, AspectRatio → 0.4,
   AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All, AxesLabel → {z, f[z]}, ImageSize → {200, 120}],
  {n, 2, 50, 1, Appearance → "Labeled"}, {{p, 0.5}, 0.03, 0.5, Appearance → "Labeled"}]
```



In den Zeiten, als man noch keinen Computer zur Verfügung hatte, kam dem Gesetz der seltenen Ereignisse auch eine große praktische Bedeutung zu, da man damit Wahrscheinlichkeiten oft wesentlich leichter berechnen konnte. Wir machen dazu ein einfaches Beispiel:

21.2.12 Beispiel: 1% der von einer Maschine angefertigten Stücke seien defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stichprobe von 100 Stück 3 oder mehr Stücke defekt sind?
(i) näherungsweise mit dem Gesetz der seltenen Ereignisse
(ii) exakt

▼

Lösung:

Z_n - die Anzahl von defekten Stücken;

$Z_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, wobei n=100 und p_n=0.01;

$\mathbb{P}[\{Z_n \geq 3\}] = 1 - \mathbb{P}[\{Z_n < 3\}]=1-\sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} {p_n}^i (1-p_n)^{n-i}$=0.079.

```
n = 100; p = 0.01;
1 - Sum[Binomial[n, i] p^i (1 - p)^(n-i), {i, 0, 2}]
Clear[n, p]
```

```
0.0793732
```

Gesetz der seltenen Ereignisse:

Dieses Gesetz der seltenen Ereignisse besagt, dass für große n und kleine p die Binomialverteilung mit den Parametern n und p durch die Poissonverteilung mit dem Parameter α=$n\,p$ approximiert werden kann

$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\,{p_n}^k\,(1-p_n)^{n-k}$=$e^{-\alpha}\,\frac{\alpha^k}{k!}$ $\Longrightarrow$ für α=100·0.01=1 erhält man also

$\mathbb{P}[\{Z_n\geq 3\}]$=1-$\sum_{i=0}^{2}\frac{\alpha^i}{i!}\,e^{-\alpha}$=

```
α = 1;
1 - Sum[α^i/i! Exp[-α], {i, 0, 2}] // N
Clear[α]
```

```
0.0803014
```

21.2.13 Beispiel: In einem Postamt werden in einem Jahr durchschnittlich 1017 Briefe ohne Adresse aufgegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem bestimmten Tag mehr als drei Briefe ohne Adresse aufgegeben werden?

▼

Lösung: Teilt man das Jahr in n sehr kurze Zeitintervalle - etwa Minuten - ein, so kann man in erster Näherung annehmen, dass die Zeitpunkte, in denen ein Brief ohne Adresse aufgegeben wird, einen Bernoulliprozess mit dem sehr kleinen Parameter p_n bilden. Nun kennt man aber den Erwartungswert der Anzahl Z_n der Briefe, welche in einem Jahr ohne Adresse aufgegeben werden. Aus der Beziehung $1017=\mathbb{E}[Z_n]=n\,p_n$ ergibt sich für diesen Parameter daher der Wert $p_n=1017/n$.

Nimmt man nun an, dass der zur Diskussion stehende Tag mit dem n_1+1-ten Zeitintervall beginnt und mit dem n_2-ten Zeitintervall endet (wobei $(n_2-n_1)=n/365$ gilt), so entspricht die Anzahl der Briefe, welche an diesem Tag ohne Adresse aufgegeben werden, dem Zuwachs $Z_{n_2}-Z_{n_1}$.

Dieser Zuwachs ist aber bekanntlich $\mathcal{B}[n_2-n_1,\,p_n]$-verteilt und damit nach dem Gesetz der seltenen Ereignisse (n_2-n_1 ist sehr groß, p_n ist sehr klein) wegen $(n_2-n_1)\,p_n=1017/365$ annähernd $\mathcal{P}[1017/365]$-verteilt. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z_{n_2}-Z_{n_1}>3\}]$ ergibt sich somit

```
α = 1017/365;
1 - CDF[PoissonDistribution[α], 3] // N
Clear[α]
```

```
0.305016
```

21.3 Die negative Binomialverteilung $\mathcal{NB}[n,\,p]$

21.4 Die hypergeometrische Verteilung $\mathcal{H}[n,\,n_{suc},\,n_{tot}]$

21.5 Die Multinomialverteilung $\mathcal{MB}[n, \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}]$

Wir haben bereits erwähnt, dass die Multinomialverteilung in gewissem Sinn eine Verallgemeinerung der Binomialverteilung darstellt. Diese Analogie wird durch die folgende Bemerkung noch deutlicher:

21.5.1 Bemerkung: Wir betrachten ein Zufallsexperiment, bei dem die paarweise disjunkten Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_r$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_r$ eintreten können und setzen weiter voraus, dass $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_r = \Omega$ und damit $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$ gilt. Wird dieses Zufallsexperiment n mal unabhängig wiederholt und gibt für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ die Zufallsvariable Z_i an, wie oft dabei das Ereignis A_i eintritt, so gilt $\mathbb{P}_{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r} = \mathcal{MB}[n, \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}]$.

▼

Beweis: Für alle $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$ folgt aus dem Multiplikationssatz und unseren Ausführungen über die Binomialverteilung

$$\mathbb{f}_{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r}[k_1, k_2, \ldots, k_r] = \mathbb{P}[\{Z_1 = k_1\} \bigcap \{Z_2 = k_2\} \bigcap \ldots \bigcap \{Z_{r-1} = k_{r-1}\}] =$$

$$= \mathbb{P}[\{Z_1 = k_1\}]\, \mathbb{P}[\{Z_2 = k_2\} \mid \{Z_1 = k_1\}] \ldots \mathbb{P}[\{Z_{r-1} = k_{r-1}\} \mid \{Z_1 = k_1\} \bigcap \ldots \bigcap \{Z_{r-2} = k_{r-2}\}] =$$

$$= \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} (1 - p_1)^{n-k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{k_2} \left(1 - \frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-k_1-k_2} \ldots$$

$$\ldots \binom{n - k_1 - \ldots - k_{r-2}}{k_{r-1}} \left(\frac{p_{r-1}}{1 - p_1 - \ldots - p_{r-2}}\right)^{k_{r-1}} \left(1 - \frac{p_{r-1}}{1 - p_1 - \ldots - p_{r-2}}\right)^{n-k_1-\ldots-k_{r-1}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_{r-1}!\, k_r!}\, p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \ldots p_{r-1}^{k_{r-1}}\, p_r^{k_r}$$

Wir fassen die bereits bekannten Eigenschaften der Multinomialverteilung $\mathcal{MB}[n, \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}]$ zusammen:

21.5.2 Bemerkung: Die Multinomialverteilung $\mathcal{MB}[n, \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}]$ besitzt den Träger

$$\mathbb{T} = \{\{z_1, z_2, \ldots, z_r\} \mid z_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \text{ und } z_1 + z_2 + \ldots + z_r = n\}$$

die Verteilungsdichte

$$\mathbb{f}[z_1, z_2, \ldots, z_r] = \begin{cases} \dfrac{n!}{z_1!\, z_2! \ldots z_r!}\, p_1^{z_2}\, p_2^{z_2} \ldots p_r^{z_r} & \text{für } z_i \in \{0, 1, 2, \ldots\} \text{ mit } z_1 + z_2 + \ldots + z_r = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Verteilungsfunktion

$$\mathbb{F}[z_1, z_2, \ldots, z_r] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i_1=0}^{\lfloor z_1 \rfloor} \sum_{i_2=0}^{\lfloor z_2 \rfloor} \ldots \sum_{\substack{i_r=0 \\ i_1+i_2+\ldots+i_r=n}}^{\lfloor z_r \rfloor} \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots i_r!} = p_1^{i_2}\, p_2^{i_2} \ldots p_r^{i_r} & \text{für } z_1 \geq 0, \ldots, z_r \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{MB}[n, \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}]$-verteilte Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ besitzen den Erwartungswertvektor

$$\{\mathbb{E}[Z_1], \mathbb{E}[Z_2], \ldots, \mathbb{E}[Z_r]\} = \{n\, p_1, n\, p_2, \ldots, n\, p_r\}$$

und die Kovarianzmatrix

$$\Sigma = (\mathbb{K}[Z_i, Z_k])_{i,k \in \{1,2,\ldots,r\}} = \begin{pmatrix} n\, p_1 (1 - p_1) & -n\, p_1\, p_2 & \ldots & -n\, p_1\, p_r \\ -n\, p_2\, p_1 & n\, p_2 (1 - p_2) & \ldots & -n\, p_2\, p_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n\, p_r\, p_1 & -n\, p_r\, p_2 & \ldots & n\, p_r (1 - p_r) \end{pmatrix}$$

Es folgen wieder einige Beispiele, mit denen gezeigt wird, wie die Multinomialverteilung verwendet wird:

21.5.3 Beispiel: Eine Urne enthält $r = 5$ rote, $w = 4$ weiße und $b = 3$ blaue Kugeln. Eine Kugel wird zufällig gezogen, ihre Farbe notiert und wieder in die Urne zurückgelegt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von $n = 6$ so ausgewählten Kugeln $k_1 = 3$ rot, $k_2 = 2$ weiß und $k_3 = 1$ blau sind.

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit Z_1 bzw Z_2 bzw Z_3 die Anzahl der beim $n = 6$ maligen Ziehen gezogenen roten bzw weißen bzw blauen Kugeln. Wegen Bemerkung 20.5.1 handelt es sich bei der gemeinsamen Verteilung dieser Zufallsvariablen Z_1, Z_2, Z_3 um eine Multinomialverteilung mit den Parametern $n = 6$, $p_1 = 5/12$, $p_2 = 4/12$ und $p_3 = 3/12$. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt somit

```
n = 6; p1 = 5/12; p2 = 4/12; p3 = 3/12;
PDF[MultinomialDistribution[n, {p1, p2, p3}], {3, 2, 1}] // N
Clear[n, p1, p2, p3]
```

```
0.120563
```

21.5.4 Beispiel: $n = 8$ Kugeln werden zufällig auf $r = 5$ Urnen verteilt, wobei jede Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in jede Urne gelangen kann. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine Urne leer bleibt (man vergleiche dazu auch Beispiel 8.2.2).

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ die Anzahl der Kugeln in den einzelnen Urnen. Da jede Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in jede Urne gelangen kann, handelt es sich bei der gemeinsamen Verteilung der Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ um eine Multinomialverteilung mit den Parametern n und $\{1/r, 1/r, \ldots, 1/r\}$.

Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{Z_1 > 0\} \bigcap \{Z_2 > 0\} \bigcap \ldots \bigcap \{Z_r > 0\}]$ ergibt sich daher unter Verwendung von *Mathematica*

```
n = 8; r = 5; p = Table[1/r, {i, 1, r}];
Sum[PDF[MultinomialDistribution[n, p], Array[z, r]],
   Evaluate[Apply[Sequence, Table[{z[i], 1, r}, {i, 1, r}]]]] // N
Clear[n, r, p]
```

```
0.32256
```

(Man beachte dabei: Der für den Befehl Sum erforderliche Summationsbereich hat die Gestalt

$\{z[1], 1, r\}, \{z[2], 1, r\}, \ldots, \{z[r], 1, r\}$

Mit Hilfe von Table lässt sich aber nur eine Liste der Form

$\{\{z[1], 1, r\}, \{z[2], 1, r\}, \ldots, \{z[r], 1, r\}\}$

erzeugen (man achte dabei genau auf die Klammerung). Um nun für beliebige Werte von r den geeigneten Summationsbereich zu erzeugen, verwenden wir einen Trick: Wir erzeugen dazu zuerst mit Hilfe von Table in der üblichen Weise die Liste $\{\{z[1], 1, r\}, \{z[2], 1, r\}, \ldots, \{z[r], 1, r\}\}$, wenden auf diese Liste den Befehl Apply zusammen mit dem Befehl Sequence an und evaluieren diesen Ausdruck mit Hilfe von Evaluate.)

21.5.5 Beispiel: $n = 12$ Kugeln werden zufällig auf $r = 6$ Urnen verteilt, wobei jede Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in jede Urne gelangen kann. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei in genau $k = 3$ Urnen jeweils genau eine Kugel gelangt?

▼

Lösung: Wir bezeichnen mit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ wieder die Anzahl der Kugeln in den einzelnen Urnen. Da jede Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in jede Urne gelangen kann, handelt es sich bei der gemeinsamen Verteilung der Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ um eine $\mathcal{MB}[n, \{1/r, 1/r, \ldots, 1/r\}]$-Verteilung. Nun lassen sich aber jene k Urnen, in die jeweils genau eine Kugel gelangen soll, bekanntlich auf r über k verschiedene Arten auswählen. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit p gilt somit

$$p = \binom{r}{k} \mathbb{P}[\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 1\} \cap \ldots \cap \{Z_k = 1\} \cap \{Z_{k+1} \neq 1\} \cap \{Z_{k+2} \neq 1\} \cap \ldots \cap \{Z_r \neq 1\}]$$

Wir werten diese Formel wieder mit Hilfe von *Mathematica* aus, indem wir zuerst unter Verwendung von Tuples eine liste aller Tupel der Form $\{z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_r\}$ mit $z_i \in \{0, 2, 3, \ldots, n-k\}$ erzeugen und anschließend mit Hilfe von Table und Join jedem dieser Tupel k Einser voransetzen (die dabei entstehende Liste nennen wir summationsbereich). Schließlich summieren wir die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse

$$\mathbb{P}[\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 1\} \cap \ldots \cap \{Z_k = 1\} \cap \{Z_{k+1} \neq 1\} \cap \{Z_{k+2} \neq 1\} \cap \ldots \cap \{Z_r \neq 1\}]$$

mit Sum auf und multiplizieren das Ergebnis mit dem Faktor r über k:

```
n = 12; r = 6; k = 3; p = Table[1/r, {r}];
liste = Tuples[Delete[Table[i, {i, 0, n - k}], 2], r - k];
summationsbereich = Table[Join[Table[1, {k}], liste[[i]]], {i, (n - k)^(r-k)}];
Binomial[r, k] Sum[PDF[MultinomialDistribution[r, p], summationsbereich[[i]]], {i, (n - k)^(r-k)}] // N
Clear[n, r, k, p, liste, summationsbereich]
```

```
0.154321
```

21.5.6 Beispiel: Man zeige: Genügen die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_r$ einer Multinomialverteilung mit den Parametern m und $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ einer Multinomialverteilung mit den Parametern n und $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ und sind alle Zufallsvariablen X_i von allen Zufallsvariablen Y_k vollständig unabhängig, so genügen die Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ mit $Z_i = X_i + Y_i$ einer Multinomialverteilung mit den Parametern $m + n$ und $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$.

▼

Lösung: Wir betrachten ein Zufallsexperiment, bei dem die paarweise disjunkten Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_r$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_r$ eintreten können und setzen voraus, dass $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r = \Omega$ und damit $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$ gilt. Wird dieses Zufallsexperiment m mal unabhängig wiederholt und gibt für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ die Zufallsvariable X_i an, wie oft dabei das Ereignis A_i eintritt, so gilt für die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_r$ wegen Bemerkung 21.5.1 bekanntlich

$$\mathbb{P}_{X_1, X_2, \ldots, X_r} = \mathcal{MB}[m, \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}]$$

Wird dieses Zufallsexperiment anschließend n mal unabhängig wiederholt und gibt für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ die Zufallsvariable Y_k an, wie oft nun das Ereignis A_k eintritt, so sind alle Zufallsvariablen X_i von allen Zufallsvariablen Y_k vollständig unabhängig und für die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ gilt

$$\mathbb{P}_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_r} = \mathcal{MB}[n, \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}]$$

Insgesamt wurde dieses Zufallsexperiment damit $m + n$ mal unabhängig wiederholt, wobei $Z_i = X_i + Y_i$ mal das Ereignis A_i eingetreten ist. Für die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ gilt daher

$$\mathbb{P}_{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r} = \mathcal{MB}[m + n, \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}]$$