

§22 Der Poissonprozess



Eines der am meisten verwendeten Modelle der Stochastik ist der sogenannte **Poissonprozess**. Wir werden einen Poissonprozess dabei als "infinitesimalen" Bernoulliprozess definieren und damit ein tiefes Verständnis für Poissonprozesse erzeugen. Viele interessante Eigenschaften von Poissonprozessen lassen sich damit nämlich auf oft sehr einfache Weise herleiten.

Mit einem Poissonprozess sind wieder eine Reihe von Verteilungen eng verbunden. Es handelt sich dabei um die Poissonverteilung, die Gammaverteilung und (als Spezialfälle der Gammaverteilung) die Erlangverteilung und die Exponentialverteilung. Wir werden ausführlich darauf eingehen, bei welchen Fragestellungen diese Verteilungen auftreten und welche Eigenschaften diese Verteilungen besitzen. Außerdem werden wir wieder an Hand von zahlreichen Beispielen zeigen, wie mit diesen Verteilungen gearbeitet wird.

22.1 Der Poissonprozess

Sei $\Xi \subseteq \mathbb{R}^n$ ein vorgegebener Bereich, den wir in lauter "infinitesimale" Teilbereiche $d\Xi$ mit gleicher Länge bzw gleichem Flächeninhalt bzw gleichem Volumen $|d\Xi|$ zerlegen. Wichtige Beispiele dafür sind die Bereiche $\Xi = \mathbb{R}$ und $\Xi = [0, \infty[$, die wir in lauter "infinitesimale" Intervalle der Form $[t, t + dt]$ zerlegen sowie Bereiche $\Xi \subseteq \mathbb{R}^2$, die wir in lauter "infinitesimale" Rechtecke der Form $[s, s + ds] \times [t, t + dt]$ zerlegen.

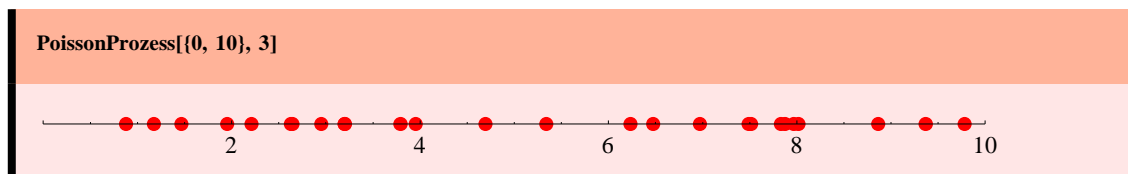
Mit dieser Vorbereitung sind wir nun in der Lage, den Begriff des Poissonprozesses inhaltlich zu definieren:

22.1.1 Definition: Wir betrachten ein Zufallsexperiment, bei dem ein gewisses Ereignis A mit der infinitesimalen Wahrscheinlichkeit $\lambda |d\Xi|$ eintreten kann (tritt das Ereignis A ein, so spricht man von einem **Erfolg**). Wird dieses Zufallsexperiment laufend in jedem "infinitesimalen" Bereich $d\Xi$ unabhängig wiederholt, so sagt man, auf dem Bereich Ξ liegt ein **Poissonprozess mit Intensität λ** vor. Wie wir sehen werden, entspricht die Intensität λ der mittleren Anzahl der Erfolge im Einheitsbereich.

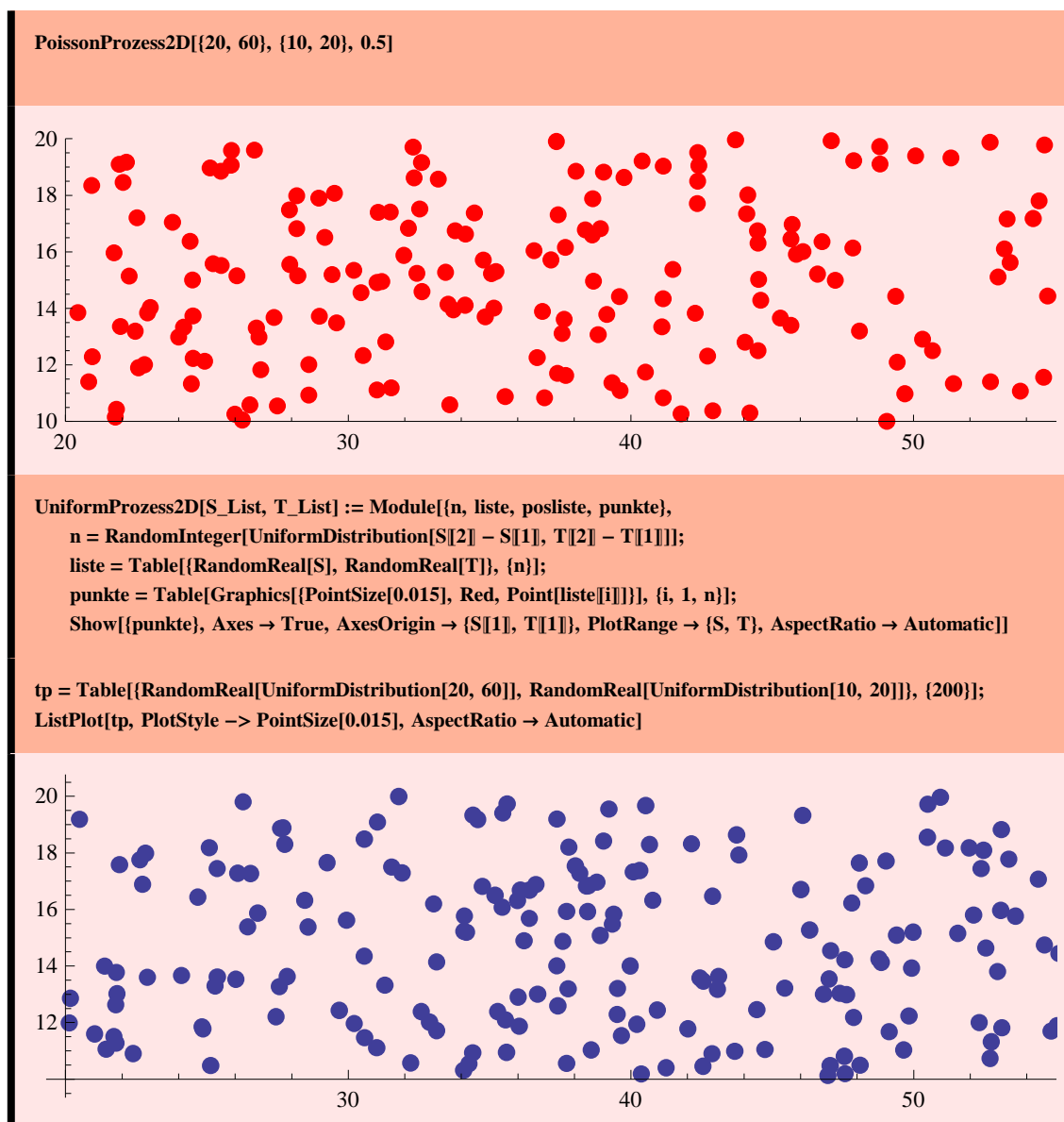
Einfache Beispiele für Poissonprozesse sind

- die Zeitpunkte, in denen eine radioaktive Substanz α -Teilchen emittiert;
- die Zeitpunkte, in denen bei einer Telefonzentrale Anrufe eintreffen;
- die Zeitpunkte, in denen bei einer Bedienungsanlage (Server) Forderungen (Nachrichten) eintreffen;
- die Zeitpunkte, in denen (bei schwachem Verkehr) Fahrzeuge eine bestimmte Zählstelle kreuzen;
- die Orte, in denen ein Garn Noppen aufweist;
- die Orte, in denen ein Stück Stahlblech Fremdkörpereinschlüsse aufweist;
- die Orte eines lichten Waldes, in denen Bäume wachsen;
- die Orte, in denen sich zu einem gewissen Zeitpunkt die Moleküle eines idealen Gases befinden;
- die Positionen der Sonnen eines Kugelsternhaufens.

Mit dem Befehl `PoissonProzess[S, λ]` lässt sich eine zufällige Realisierung ω eines eindimensionalen Poissonprozesses erzeugen. Die Liste $S = \{s_1, s_2\}$ beschreibt das Intervall $[s_1, s_2]$, in dem wir diese zufällige Realisierung ω beobachten, der Parameter λ entspricht der mittleren Anzahl der Erfolge im Einheitsintervall $[0, 1]$. Die **roten Punkte** kennzeichnen jene Zeitpunkte, in denen das Ereignis A eintritt, also ein Erfolg zu verzeichnen ist:



Mit dem Befehl `PoissonProzess2D[S, T, λ]` lässt sich eine zufällige Realisierung ω eines zweidimensionalen Poissonprozesses erzeugen. Die Listen $S = \{s_1, s_2\}$ und $T = \{t_1, t_2\}$ beschreiben das Rechteck $[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$, in dem wir diese zufällige Realisierung ω beobachten, der Parameter λ entspricht der mittleren Anzahl der Erfolge im Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Die roten Punkte kennzeichnen jene Punkte, in denen das Ereignis A eintritt, also ein Erfolg zu verzeichnen ist.



Mit einem Poissonprozess mit Parameter λ sind wieder eine Reihe von Zufallsvariablen bzw Verteilungen eng verbunden. Wir werden nun diese Zufallsvariablen zusammen mit ihren Eigenschaften und Verteilungen angeben und diese Verteilungen in den folgenden Abschnitten im Detail besprechen.

22.1.2 Definition: Für jede Teilmenge $B \subseteq \Xi$ mit endlichem Inhalt $|B|$ bezeichne die Zufallsvariable Z_B die **Anzahl der Erfolge in der Menge B** . Die diskrete Zufallsvariable Z_B ist wegen der **Formel von Bernoulli** mit den Parametern $n = |B|/|d B|$ und $p = \lambda |d B|$ binomialverteilt und damit wegen des **Gesetzes der seltenen Ereignisse** $\mathcal{P}[\lambda |B|]$ -verteilt.

Wenn von einem **Poissonprozess mit Intensität λ** auf dem Bereich $\Xi \subseteq \mathbb{R}^n$ die Rede ist, so versteht man in der

Stochastik darunter stets diese Familie $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ von Zufallsvariablen. (Mit $B \subseteq \Xi$ bezeichnen wir dabei jeweils eine Teilmenge B von Ξ mit endlichem Inhalt $|B|$.)

Sei $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ ein Poissonprozess mit Intensität λ auf dem Bereich Ξ . Da wir Poissonprozesse als infinitesimale Bernoulliprozesse definiert haben, folgt unmittelbar aus [Bemerkung 21.1.6](#)

22.1.3 Bemerkung: Für paarweise disjunkte Teilmengen $B_1, B_2, \dots \subseteq \Xi$ mit endlichem Inhalt sind die Zufallsvariablen Z_{B_1}, Z_{B_2}, \dots vollständig unabhängig.

Diese Eigenschaft zusammen mit der Eigenschaft, dass die Zufallsvariablen Z_B mit dem Parameter $\lambda|B|$ poissonverteilt sind, ist charakteristisch für einen Poissonprozess:

22.1.4 Bemerkung: Besitzt die Familie $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ von Zufallsvariablen die beiden Eigenschaften

- für alle $B \subseteq \Xi$ ist die Zufallsvariable Z_B mit dem Parameter $\lambda|B|$ poissonverteilt;
- für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \subseteq \Xi$ sind die Zufallsvariablen Z_{B_1}, Z_{B_2}, \dots vollständig unabhängig,

so handelt es sich bei dieser Familie $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ um einen Poissonprozess mit Intensität λ .

Die folgende Eigenschaft eines Poissonprozesses $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ ist oft von zentraler Bedeutung:

22.1.5 Satz: Für beliebige Teilmengen $B \subseteq \Xi$ und alle $n \in \mathbb{N}$ sind unter der Voraussetzung $\{Z_B = n\}$ die Positionen X_1, X_2, \dots, X_n dieser n Erfolge in der Menge B vollständig unabhängig und auf B gleichverteilt.

▼

Beweis: Seien $B \subseteq \Xi$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt. Für die paarweise disjunkten "infinitesimalen" Bereiche $d\Xi_1, d\Xi_2, \dots, d\Xi_n \subseteq B$ gilt wegen [Bemerkung 21.1.3](#) und der Tatsache dass sich n Dinge bekanntlich auf $n!$ verschiedene Arten anordnen lassen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\{X_1 \in d\Xi_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in d\Xi_n\} | \{Z_B = n\}] &= \\ &= \frac{\mathbb{P}[\{Z_{d\Xi_1} = 1\} \cap \dots \cap \{Z_{d\Xi_n} = 1\} \cap \{Z_{B - (d\Xi_1 \cup \dots \cup d\Xi_n)} = 0\}]}{n! \mathbb{P}[\{Z_B = n\}]} = \\ &= \frac{\overset{=1}{e^{-\lambda |d\Xi_1|} \lambda |d\Xi_1|} \dots \overset{=1}{e^{-\lambda |d\Xi_n|} \lambda |d\Xi_n|} \overset{=e^{-\lambda |B|}}{e^{-\lambda(|B| - |d\Xi_1| - \dots - |d\Xi_n|)}}}{e^{-\lambda |B|} (\lambda |B|)^n} = \frac{d\Xi_1 d\Xi_2 \dots d\Xi_n}{|B|^n} \end{aligned}$$

Basierend auf diesem Satz lässt sich ein Poissonprozess mit Intensität λ auf einem beliebigen Bereich $\Xi \subseteq \mathbb{R}^d$ leicht simulieren: Man erzeugt dazu zuerst eine mit dem Parameter $\lambda|\Xi|$ poissonverteilte Zufallszahl n und wählt anschließend n auf der Menge Ξ gleichverteilte Punkte aus.

22.1.6 Beispiel: Man entwickle eine Prozedur, mit der sich eine Realisierung ω eines zweidimensionalen Poissonprozesses mit Parameter λ auf dem Rechteck $[S_1, S_2] \times [T_1, T_2] \subseteq \mathbb{R}^2$ simulieren und graphisch darstellen lässt.

▼

Wir wollen nun eindimensionale Poissonprozesse $\mathcal{Z} = \{Z_B | B \subseteq \mathbb{R}\}$ mit Intensität λ näher untersuchen. Aus der Tatsache, dass wir einen Poissonprozess als "infinitesimalen" Bernoulliprozess definiert haben, erhält man unmittelbar die beiden Eigenschaften:

22.1.7 Regenerationseigenschaft: Ein eindimensionaler Poissonprozess $\mathcal{Z} = \{Z_B | B \subseteq \mathbb{R}\}$ mit Intensität λ verhält sich von einem beliebigen Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ an genau so, wie ein zu diesem Zeitpunkt t neu gestarteter, vom bisherigen Verhalten des Prozesses \mathcal{Z} unabhängiger Poissonprozess $\hat{\mathcal{Z}} = \{\hat{Z}_B | B \subseteq [0, \infty[\}$ mit Intensität λ .

22.1.8 Zeitreversibilität: Invertiert man bei einem eindimensionalen Poissonprozess $\mathcal{Z} = \{Z_B | B \subseteq \mathbb{R}\}$ mit Intensität λ die Richtung der Zeit (das bedeutet, dass man alle Realisierungen ω dieses Prozesses am Ursprung spiegelt), so erhält man wieder einen eindimensionalen Poissonprozess $\tilde{\mathcal{Z}} = \{\tilde{Z}_B | B \subseteq \mathbb{R}\}$ mit Intensität λ .

Sowohl die Regenerationseigenschaft als auch die Zeitreversibilität eines eindimensionalen Poissonprozesses lässt sich am Ticken eines Geigerzählers (es handelt sich dabei um jene Zeitpunkte, in denen ein α -Teilchen einer radioaktiven Substanz, von der wir annehmen wollen, dass sie eine sehr lange Halbwertszeit besitzt, den Geigerzähler trifft) gut veranschaulichen:

Die [Regenerationseigenschaft](#) entspricht der Tatsache, dass für einen beliebigen Zeitpunkt t der bisherige Verlauf des Tickens keinen Einfluss auf den Verlauf des Tickens ab diesem Zeitpunkt t hat und sich das Ticken dieses Geigerzählers ab diesem Zeitpunkt t nicht vom Ticken eines zum Zeitpunkt t neu gestarteten Geigerzählers unterscheidet.

Die [Zeitreversibilität](#) beschreibt die Tatsache, dass es unmöglich ist, von einem auf Tonband aufgenommenen Ticken zu entscheiden, ob das Tonband vorwärts oder rückwärts abläuft.

22.1.9 Definition: Ist $\mathcal{Z} = \{Z_B | B \subseteq \mathbb{R}\}$ ein eindimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ , so nennt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable

$$Y_n = \text{Min} \{s \mid s > 0 \text{ und } Z_{]0, s]} = n\}$$

die **Wartezeit bis zum n -ten Erfolg**.

22.1.10 Satz: Ist $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ ein eindimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ , so ist die Wartezeit Y_n bis zum n -ten Erfolg $\text{Gamma}[n, 1/\lambda]$ -verteilt. Wegen [Bemerkung 14.2.17](#) ist die Wartezeit Y_1 bis zum ersten Erfolg somit $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt.

▼

Beweis: Für alle $n \in \{1, 2, \dots\}$ und alle $y > 0$ gilt

$$\mathbb{P}_{Y_n}[y] = \mathbb{P}\{Y_n \leq y\} = 1 - \mathbb{P}\{Y_n > y\} = 1 - \mathbb{P}\{Z_{]0, y]} \leq n - 1\}$$

Die Behauptung folgt damit unmittelbar aus der Tatsache, dass bei einem eindimensionalen Poissonprozess mit Intensität λ die Anzahl der Erfolge $Z_{]0, y]}$ im Intervall $]0, y]$ [bekanntlich](#) $\mathcal{P}[\lambda y]$ -verteilt ist, zusammen mit der Identität

```
FullSimplify[1 - CDF[PoissonDistribution[λ y], n - 1] == CDF[GammaDistribution[n, 1/λ], y], n ∈ Integers]
```

```
True
```

Die oben erwähnte **Regenerationseigenschaft** lässt sich wesentlich verschärfen. Wir benötigen dazu den zentralen Begriff der Stoppzeit:

22.1.11 Definition: Sei $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ ein eindimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ . Die Zufallsvariable T nennt man eine **\mathcal{Z} -Stoppzeit**, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ das Ereignis $\{T \leq t\}$ nur vom Verhalten des Prozesses \mathcal{Z} bis zum Zeitpunkt t und eventuell weiteren, vom Prozess \mathcal{Z} unabhängigen Zufallsvariablen abhängt und damit vom Verhalten des Prozesses \mathcal{Z} nach dem Zeitpunkt t unabhängig ist.

Ein typisches Beispiel für eine \mathcal{Z} -Stoppzeit ist die Wartezeit Y_n bis zum n -ten Erfolg: Für alle $t \in \mathbb{R}$ hängt das Ereignis $\{Y_n \leq t\}$ offenbar nur vom Verhalten des Prozesses \mathcal{Z} bis zum Zeitpunkt t ab.

22.1.12 Verallgemeinerte Regenerationseigenschaft: Ein eindimensionaler Poissonprozess $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ mit Intensität λ verhält sich von einer beliebigen \mathcal{Z} -Stoppzeit T an genau so, wie ein zu diesem Zeitpunkt T neu gestarteter, vom bisherigen Verhalten des Prozesses \mathcal{Z} unabhängiger Poissonprozess $\hat{\mathcal{Z}} = \{\hat{Z}_B \mid B \subseteq [0, \infty[\}$ mit Intensität λ .

▼

Beweis: Für alle $t \in \mathbb{R}$ lässt sich das Ereignis $\{T = t\}$ allein durch das Verhalten des Prozesses \mathcal{Z} bis zum Zeitpunkt t , also durch die Zufallsvariablen Z_B mit $B \subseteq]-\infty, t]$ und eventuell weiteren, vom Prozess \mathcal{Z} unabhängigen Zufallsvariablen beschreiben und ist daher vom Verhalten des Prozesses \mathcal{Z} nach dem Zeitpunkt t unabhängig. Unter der Voraussetzung $\{T = t\}$ verhält sich der Prozess \mathcal{Z} damit vom Zeitpunkt t an wegen der **Regenerationseigenschaft** ebenso, wie ein zu diesem Zeitpunkt t neu gestarteter, vom bisherigen Verhalten des ursprünglichen Prozesses und damit auch vom Ereignis $\{T = t\}$ unabhängiger Poissonprozess $\hat{\mathcal{Z}} = \{\hat{Z}_B \mid B \subseteq [0, \infty[\}$ mit Intensität λ .

Die **verallgemeinerte Regenerationseigenschaft** entspricht der Tatsache, dass für eine beliebige Stoppzeit T (etwa jener Zeitpunkt, zu dem der Geigerzähler das n -te mal tickt), der bisherige Verlauf des Tickens keinen Einfluss auf den Verlauf des Tickens nach dieser Stoppzeit T hat und sich das Ticken dieses Geigerzählers ab dieser Stoppzeit T nicht vom Ticken eines zum Zeitpunkt 0 neu gestarteten Geigerzählers unterscheidet.

22.1.13 Satz: Ist $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ ein eindimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ , so sind die **Pausen** $Y_1, Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \dots$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Erfolgen vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt.

▼

Beweis: Wegen **Satz 22.1.10** ist die Wartezeit Y_1 $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt. Aufgrund der **verallgemeinerten Regenerationseigenschaft** verhält sich der Prozess \mathcal{Z} von der Wartezeit Y_n an genau so, wie ein zu diesem Zeitpunkt Y_n neu gestarteter, vom bisherigen Verhalten des ursprünglichen Prozesses $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ unabhängiger Poissonprozess $\hat{\mathcal{Z}} = \{\hat{Z}_B \mid B \subseteq [0, \infty[\}$ mit Intensität λ . Die Pause $Y_{n+1} - Y_n$ ist damit vom bisherigen Verhalten des Prozesses \mathcal{Z} und damit von den Pausen $Y_1, Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_{n-1}$ unabhängig und, da sie der Wartezeit \hat{Y}_1 des Prozesses $\hat{\mathcal{Z}}$ entspricht, wegen **Satz 22.1.10** ebenfalls $\mathcal{G}[\text{Gamma}[1, 1/\lambda]]$ -verteilt.

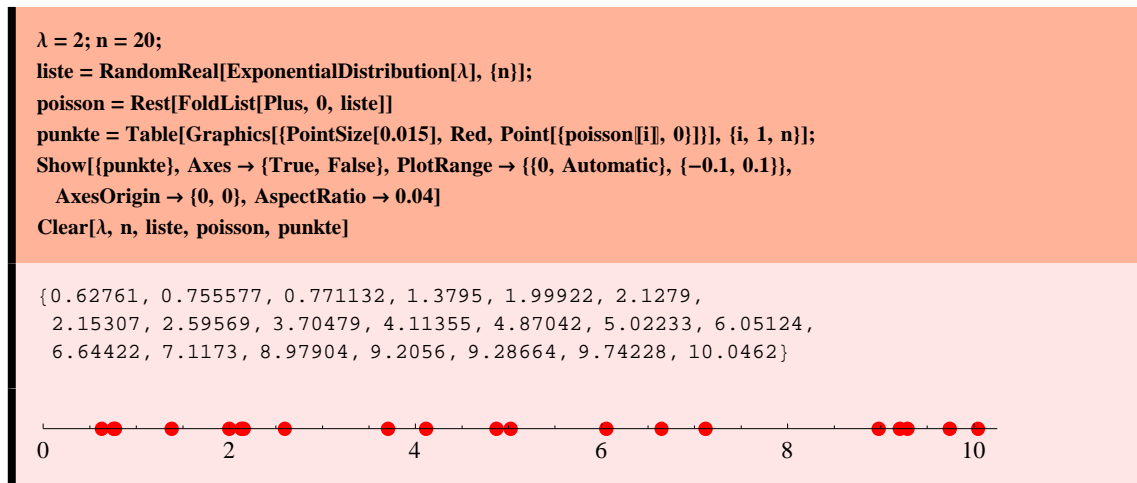
Basierend auf diesem Satz lässt sich ein eindimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ auf dem Bereich $]0, \infty[$ leicht simulieren: Man muss dazu nur $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilte Zufallszahlen erzeugen und diese als die Pausen des gesuchten Prozesses interpretieren (man vergleiche diese Methode zur Simulation eines eindimensionalen Poissonprozesses mit der unmittelbar vor **Beispiel 22.1.6** angeführten Methode, welche auf einem ganz anderen Prinzip beruht).

22.1.14 Beispiel: Man entwickle eine Prozedur, mit der sich eine Realisierung ω eines eindimensionalen Poissonprozesses mit Parameter λ auf dem Bereich $[0, \infty[$ erzeugen und graphisch darstellen lässt.

▼

Lösung: Mit Hilfe von **RandomReal** erzeugt man dazu eine Liste von n $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilten Zufallszahlen (es handelt sich dabei um die Pausen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Erfolgen) und addiert die Zahlen dieser Liste mit

Hilfe von `FoldList` sukzessive auf, wobei man das unerwünschte erste Element dieser Liste (nämlich die Zahl 0) mit Hilfe von `Rest` beseitigt (auf diese Weise erhält man jene Zeitpunkte, in denen die einzelnen Erfolge stattfinden). Die graphische Darstellung der auf diese Weise erzeugten Realisierung ω erfolgt dann in der üblichen Weise.



Für tiefer liegende Untersuchungen über eindimensionale Poissonprozesse $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ mit Intensität λ ist die folgende Begriffsbildung von Interesse:

22.1.15 Definition: Ist $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ ein eindimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ , so nennt man für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Zufallsvariable

$$V_t = \text{Min} \{s > 0 \mid Z_{]t, t+s]} = 1\}$$

die **Vorwärtsrekurrenzzeit zum Zeitpunkt t** und die Zufallsvariable

$$R_t = \text{Min} \{s > 0 \mid Z_{]t-s, t]} = 1\}$$

die **Rückwärtsrekurrenzzeit zum Zeitpunkt t** .

22.1.16 Satz: Ist $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ ein eindimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ , so sind die Vorwärtsrekurrenzeit V_t und die Rückwärtsrekurrenzeit R_t stets unabhängig und $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt.

▼

Beweis: Die Vorwärtsrekurrenzeit V_t hängt nur von den Zufallsvariablen Z_B mit $B \subseteq]t, \infty[$ ab, die Rückwärtsrekurrenzeit hängt nur von den Zufallsvariablen Z_B mit $B \subseteq]-\infty, t[$ ab. Aus [Bemerkung 22.1.3](#) und der [Familieneigenschaft](#) folgt daraus die Unabhängigkeit der Vorwärtsrekurrenzeit V_t von der Rückwärtsrekurrenzeit R_t .

Wegen der [Regenerationseigenschaft](#) verhält sich der Prozess $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ vom Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ an ebenso, wie ein zu diesem Zeitpunkt t neu gestarteter, vom bisherigen Verhalten des ursprünglichen Prozesses unabhängiger Poissonprozess $\hat{\mathcal{Z}} = \{\hat{Z}_B \mid B \subseteq [0, \infty[$ mit Intensität λ . Die Vorwärtsrekurrenzeit V_t des Prozesses \mathcal{Z} entspricht dabei der Wartezeit \hat{Y}_1 des Prozesses $\hat{\mathcal{Z}}$ und ist damit wegen [Satz 22.1.10](#) $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt.

Wegen der [Zeitreversibilität](#) entsteht durch Inversion der Zeit aus dem Prozess $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ wieder ein eindimensionaler Poissonprozess $\tilde{\mathcal{Z}} = \{\tilde{Z}_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ mit Intensität λ . Die Rückwärtsrekurrenzeit R_t des Prozesses \mathcal{Z} entspricht dabei der Vorwärtsrekurrenzeit \tilde{V}_{-t} des Prozesses $\tilde{\mathcal{Z}}$ und ist somit ebenfalls $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt.

22.1.17 Beispiel: Eine Telefonistin beschwert sich bei ihrem Chef darüber, dass sie pro Minute durchschnittlich eine Vermittlung durchführen muss, was für sie zu anstrengend ist. Der penible Chef überprüft diese Behauptung seiner Telefonistin auf folgende Weise: Er betritt zu einigen zufällig gewählten Zeitpunkten die Telefonzentrale, befragt die Telefonistin, wie lange der letzte Anruf zurück liegt und beobachtet, wann der nächste Anruf eintrifft. Dabei stellt er fest, dass die Zeitspanne zwischen den beiden von ihm beobachteten Anrufen im Durchschnitt zwei Minuten beträgt. Hat die Telefonistin gelogen?

▼

Lösung: Die Zeitpunkte, in denen Anrufe bei dieser Telefonzentrale eintreffen, bilden einen Poissonprozess mit Intensität λ . Die Telefonistin beobachtet die gemäß [Satz 22.1.13](#) $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilten Pausen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anrufen. Der Chef beobachtet die wegen [Satz 22.1.16](#) und der [Faltungsformel](#) für Gammaverteilungen $\text{Gamma}[2, 1/\lambda]$ -verteilte Summe $R_t + V_t$ von Rückwärtsrekurrenzeit und Vorwärtsrekurrenzeit zum Zeitpunkt t . Wegen

```
{Mean[GammaDistribution[1, 1/λ]], Mean[GammaDistribution[2, 1/λ]]}
```

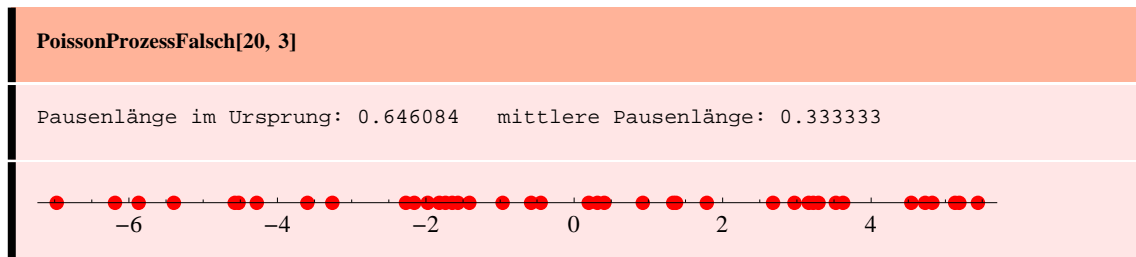
$$\left\{ \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda} \right\}$$

ist die vom Chef beobachtete Zeitspanne (man spricht dabei von der **beobachteten Pause**) im Mittel doppelt so lang, wie die von der Telefonistin beobachtete Zeitspanne. Die Telefonistin hat somit nicht gelogen. Inhaltlich wird dieses (auf den ersten Blick überraschende Ergebnis) klar, wenn man berücksichtigt, dass einige wenige lange Pausen zwischen zwei Anrufen bereits einen erheblichen Teil der Arbeitszeit der Telefonistin ausmachen. Das hat zur Folge, dass der Chef eher während einer langen Pause die Telefonzentrale betritt und damit die Länge der von ihm "beobachteten" Pause im Mittel größer ist als die mittlere Länge einer "normalen" Pause.

Dieses Beispiel (es handelt sich um das sogenannte [Paradoxon der Erneuerungstheorie](#)) sollte zur Vorsicht mahnen! Soll beispielsweise eine Realisierung ω eines eindimensionalen Poissonprozesses mit Intensität λ auf dem Bereich \mathbb{R} simuliert werden, so wäre es **falsch**, mit Hilfe der in [Beispiel 22.1.14](#) angeführten Methode zwei Realisierungen ω_1 und ω_2 eines eindimensionalen Poissonprozesses mit Intensität λ auf dem Bereich $]0, \infty[$ zu simulieren und einfach die Zeitpunkte der Realisierung ω_1 mit den Zeitpunkten der am Ursprung gespiegelten Realisierung ω_2 zu vereinigen. Die Länge der Pause zwischen jenen zwei Erfolgen, welche den Ursprung enthält, wäre dann nämlich nicht $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt, sondern $\mathcal{E}[\lambda] * \mathcal{E}[\lambda] = \text{Gamma}[2, 1/\lambda]$ -verteilt, also im Mittel doppelt so lang, wie die Zeitspanne zwischen den anderen Erfolgen.

Mit dem Befehl `PoissonProzessFalsch[n, λ]` lässt sich eine derartige zufällige Realisierung erzeugen. Der Parameter n beschreibt dabei, wieviele Punkte rechts und links vom Ursprung erzeugt werden sollen, der Parameter λ

entspricht wieder der Intensität. Man erkennt zwar auf den ersten Blick nicht, dass es sich bei dieser Realisierung nicht um eine Realisierung eines Poissonprozesses mit Intensität λ handelt. Erzeugt man aber viele derartige Realisierungen, so erkennt man, dass die Länge jener Pause, welche den Ursprung enthält, meistens deutlich größer ist, als die mittlere Länge der anderen Pausen.



Bei eindimensionalen Poissonprozessen lassen sich die Punkte in natürlicher Weise anordnen. Zusammen mit der in [Satz 22.1.13](#) behandelten Eigenschaft, wonach die Pausen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten vollständig unabhängig und exponentialverteilt sind, konnten wir damit eindimensionale Poissonprozesse leicht [simulieren](#). Bei zweidimensionalen Poissonprozessen lassen sich die Punkte gemäß ihrem Abstand vom Ursprung anordnen. Die Rolle der Pausen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten wird dann von den Flächen der Kreisringe zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten übernommen. In Analogie zu [Satz 22.1.13](#) gilt:

22.1.18 Satz: Ist $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}^2\}$ ein zweidimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ und ordnet man die Punkte nach ihrem Abstand vom Ursprung, so sind die **Flächen** der Kreisringe $F_1, F_2 - F_1, F_3 - F_2, \dots$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt. Die **Winkel**, welche die Radiusvektoren zu diesen Punkten mit der x -Achse einschließen, sind sowohl von den Flächen dieser Kreisringe als auch untereinander vollständig unabhängig und $\mathcal{U}[\{0, 2\pi\}]$ -verteilt.

Basierend auf diesem Satz lässt sich ein zweidimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ leicht simulieren: Man muss dazu $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilte Zufallszahlen erzeugen und diese als Flächen der Kreisringe zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten interpretieren und $\mathcal{U}[\{0, 2\pi\}]$ -verteilte Zufallszahlen erzeugen und diese als Winkel, welche die Radiusvektoren zu diesen Punkten mit der x -Achse einschließen, interpretieren (man vergleiche diese Methode mit der in [Beispiel 22.1.6](#) angeführten Methode).

22.1.19 Beispiel: Man entwickle eine Prozedur, mit der sich die n dem Ursprung nächstgelegenen Punkte einer Realisierung ω eines zweidimensionalen Poissonprozesses mit Parameter λ erzeugen und graphisch darstellen lässt.

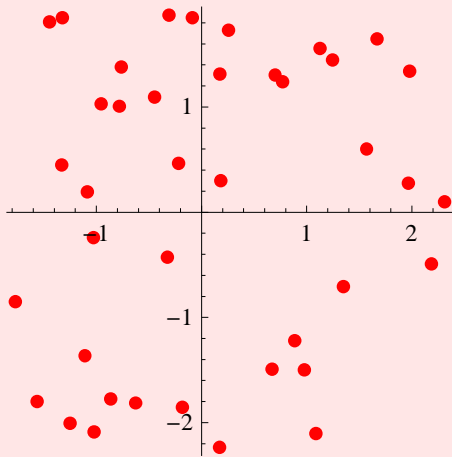
▼

Lösung: Mit Hilfe von `RandomReal` erzeugt man dazu eine Liste von n $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilten Zufallszahlen (es handelt sich dabei um die Flächen der Kreisringe zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten), addiert die Zahlen dieser Liste mit Hilfe von `FoldList` sukzessive auf, wobei man das unerwünschte erste Element dieser Liste mit `Rest` beseitigt, dividiert die Zahlen dieser Liste durch π und berechnet anschließend von diesen Zahlen die Wurzel (die dabei entstehende Liste **radien** gibt die Abstände dieser n Punkte vom Ursprung an). Mit Hilfe von `RandomReal` erzeugt man anschließend die Liste **winkel** von $\mathcal{U}[\{0, 2\pi\}]$ -verteilte Zufallszahlen (bei dieser Liste handelt es sich um die Winkeln, welche die Radiusvektoren zu diesen n Punkten mit der x -Achse einschließen). Die graphische Darstellung der auf diese Weise erzeugten Realisierung ω erfolgt in der üblichen Weise, indem man zuerst eine Liste der Koordinaten der zu zeichnenden Punkte erzeugt und diese Punkte in der üblichen Weise plottet.

```

λ = 2; n = 40;
liste = RandomReal[ExponentialDistribution[λ], {n}];
radien = Sqrt[Rest[FoldList[Plus, 0, liste]]/π];
winkel = RandomReal[UniformDistribution[{0, 2 π}], {n}];
punkte = Table[Graphics[{PointSize[0.03], Red, Point[{radien[[i]] Cos[winkel[[i]], radien[[i]] Sin[winkel[[i]]]}]}, {i, 1, n}];
Show[{punkte}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0}, AspectRatio → Automatic]
Clear[λ, n, liste, radien, winkel, punkte]

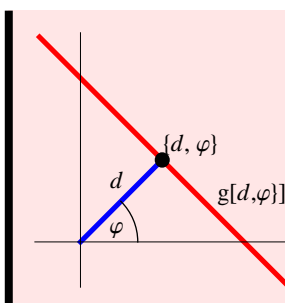
```



Poissonprozesse sind der Ausgangspunkt für eine Reihe von weiteren Modellen, mit denen sich zufällige Vorgänge in Naturwissenschaft und Technik beschreiben lassen. Eines dieser Modelle ist der sogenannte **Poisson-Geradenprozess**, welche vor allem bei Problemen im Bereich der Textilindustrie und der Mineralogie auftreten.

22.1.20 Definition: Unter einem **Poisson-Geradenprozess** mit Intensität λ versteht man einen zweidimensionalen Poissonprozess $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ mit Intensität λ auf dem Bereich $\Xi = [0, \infty[\times [0, 2\pi[$, bei dem man jeden Punkt $\{d, \varphi\} \in \Xi$ als Gerade $g[d, \varphi]$ interpretiert, welche vom Ursprung den Normalabstand d besitzt und deren Normalvektor mit der x -Achse den Winkel φ einschließt.

Der Zusammenhang zwischen einem zufälligen Punkt $\{d, \varphi\}$ des Poissonprozesses und der dazu gehörigen Geraden $g[d, \varphi]$ des Poisson-Geradenprozesses wird in der folgenden Zeichnung erläutert:



Mit dem Befehl **PoissonGeradenProzess** $[T, \lambda]$ lässt sich eine zufällige Realisierung ω eines Poisson-Geradenprozesses erzeugen. Der Parameter T beschreibt das Quadrat $[-T, T] \times [-T, T]$, in dem wir die zufälligen Geraden einzeichnen, der Parameter λ entspricht der Intensität des diesem Prozess zugrunde liegenden Poissonprozesses.



Abschließend befassen wir uns noch mit der Überlagerung bzw Verdünnung von Poissonprozessen:

22.1.21 Beispiel: Man zeige: Sind $\mathfrak{X} = \{X_B \mid B \subseteq \Xi\}$ bzw $\mathfrak{Y} = \{Y_B \mid B \subseteq \Xi\}$ zwei unabhängige Poissonprozesse mit den Intensitäten λ bzw μ , so ist ihre Überlagerung $\mathfrak{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ mit $Z_B = X_B + Y_B$ ein Poissonprozess mit Intensität $\lambda + \mu$.

▼

Beweis: Für alle Teilmengen $B \subseteq \Xi$ sind die beiden Zufallsvariablen X_B bzw Y_B unabhängig und $\mathcal{P}[\lambda | B]$ - bzw $\mathcal{P}[\mu | B]$ -verteilt, also ist die Zufallsvariable $Z_B = X_B + Y_B$ wegen der [Faltungsformel](#) für Poissonverteilungen $\mathcal{P}[(\lambda + \mu) | B]$ -verteilt. Außerdem sind die Zufallsvariablen $Z_{B_1}, Z_{B_2}, \dots, Z_{B_n}$ für paarweise disjunkte Teilmengen $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq \Xi$ offenbar vollständig unabhängig. Beim Prozess $\mathfrak{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ handelt es sich somit wegen [Bemerkung 22.1.4](#) um einen Poissonprozess mit Intensität $\lambda + \mu$.

22.1.22 Beispiel: Man zeige: Ist $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ ein Poissonprozess mit Intensität λ und werden die einzelnen Punkte unabhängig voneinander und unabhängig vom Prozess \mathcal{Z} mit der Wahrscheinlichkeit p markiert, so ist der Prozess $\mathcal{Z}^* = \{Z_B^* \mid B \subseteq \Xi\}$ der markierten Punkte ein Poissonprozess mit Intensität $p\lambda$.

▼

Beweis: Für alle Teilmengen $B \subseteq \Xi$ und alle $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt aufgrund des [Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) (die Summe werten wir unter Verwendung der Abkürzung $\alpha = \lambda |B|$ mit Hilfe von *Mathematica* aus)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\{Z_B^* = k\}] &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}[\{Z_B^* = k\} \mid \{Z_B = n\}] \mathbb{P}[\{Z_B = n\}] = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda |B|} \frac{(\lambda |B|)^n}{n!} = e^{-p \lambda |B|} \frac{(p \lambda |B|)^k}{k!} \end{aligned}$$

```
FullSimplify[Sum[Binomial[n, k] p^k (1 - p)^(n - k) Exp[-alpha] alpha^n / n!, {n, k, Infinity}], p < 1]
```

$$\frac{e^{-p \alpha} p^k \alpha^k}{\text{Gamma}[1 + k]}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Zufallsvariable Z_B^* einer $\mathcal{P}[p\lambda|B|]$ -Verteilung genügt. Außerdem sind die Zufallsvariablen $Z_{B_1}^*, Z_{B_2}^*, \dots, Z_{B_n}^*$ für paarweise disjunkte Teilmengen $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq \Xi$ offenbar vollständig unabhängig. Beim Prozess $\mathcal{Z}^* = \{Z_B^* \mid B \subseteq \Xi\}$ handelt es sich somit wegen [Bemerkung 22.1.4](#) um einen Poissonprozess mit Intensität $p\lambda$.

22.2 Die Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$

Wir fassen die bereits bekannten Eigenschaften der Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$ zusammen:

22.2.1 Bemerkung: Die Poissonverteilung $\mathcal{P}[\lambda]$ besitzt den [Träger](#)

$$\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

die [Verteilungsdichte](#)

$$f[z] = \begin{cases} e^{-\lambda} \lambda^z / z! & \text{für } z \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die [Verteilungsfunktion](#)

$$F[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor z \rfloor} e^{-\lambda} \lambda^k / k! = \Gamma_r[1 + \lfloor z \rfloor, \lambda] & \text{für } z \geq 0 \end{cases}$$

Eine $\mathcal{P}[\lambda]$ -verteilte Zufallsvariable Z besitzt den [Erwartungswert](#)

$$\mathbb{E}[Z] = \lambda$$

und die [Varianz](#)

$$\mathbb{V}[Z] = \lambda$$

Für Poissonverteilungen gilt die [Faltungsformel](#)

$$\mathcal{P}[\lambda] * \mathcal{P}[\mu] = \mathcal{P}[\lambda + \mu]$$

Es folgen wieder eine Reihe von Beispielen, mit denen gezeigt wird, wie sich die Poissonverteilung bei der Behandlung von konkreten Problemen einsetzen lässt:

22.2.2 Beispiel: Nach den Beobachtungen der beiden Physiker RUTHERFORD und GEIGER gibt eine gewisse radioaktive Substanz im Verlauf von 7.5 Sekunden durchschnittlich 3.87 α -Teilchen ab. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Substanz während einer Sekunde mindestens ein α -Teilchen emittiert.



Lösung: Nach unseren bisherigen Ausführungen darf man annehmen, dass die Zeitpunkte, in denen diese radioaktive Substanz ein α -Teilchen emittiert, einen eindimensionalen Poissonprozess mit Intensität λ bilden (als Zeiteinheit verwenden wir dabei eine Sekunde). Damit ist die Anzahl $Z_{[0,t]}$ der im Intervall $[0, t]$ emittierten Teilchen $\mathcal{P}[\lambda t]$ -verteilt. Wegen $\mathbb{E}[Z_{[0,7.5]}] = 3.87$ ergibt sich für die Intensität λ der Wert $\lambda = 3.87/7.5$. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{Z_{[0,1]} \geq 1\} = 1 - \mathbb{P}\{Z_{[0,1]} = 0\}$ gilt damit

`1 - PDF[PoissonDistribution[3.87/7.5], 0]`

0.403097

22.2.3 Beispiel: An einem Sommerabend wird durchschnittlich alle 10 Minuten eine Sternschnuppe beobachtet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Viertelstunde genau zwei Sternschnuppen beobachtet werden?



Lösung: Wir dürfen wieder annehmen, dass die Zeitpunkte, in denen Sternschnuppen auftreten, einen eindimensionalen Poissonprozess mit Intensität λ bilden (als Zeiteinheit verwenden wir dabei eine Minute). Damit ist die Anzahl $Z_{[0,t]}$ der im Intervall $[0, t]$ auftretenden Sternschnuppen $\mathcal{P}[\lambda t]$ -verteilt. Wegen $\mathbb{E}[Z_{[0,10]}] = 1$ ergibt sich für die Intensität λ der Wert $\lambda = 1/10$. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{Z_{[0,15]} = 2\}$ gilt damit

`PDF[PoissonDistribution[1.5], 2]`

0.251021

22.2.4 Beispiel: In einem lichten Wald stehen pro 100 m^2 durchschnittlich 3 Bäume. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle Bäume einen kreisförmigen Querschnitt mit einem Radius von $r = 20 \text{ cm}$ besitzen. Jemand steht in diesem Wald und feuert zufällig in eine Richtung, in welcher der Waldrand $d = 100 \text{ m}$ entfernt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Gewehrkugel einen Baumstamm trifft?



Lösung: Die Mittelpunkte der Bäume in einem lichten Wald bilden in erster Näherung einen zweidimensionalen Poissonprozess mit Intensität λ (als Flächeneinheit verwenden wir dabei einen Quadratmeter). Damit ist die Anzahl Z_B der Bäume, deren Mittelpunkte sich im Bereich B befinden, $\mathcal{P}[\lambda |B|]$ -verteilt. Bezeichnet A einen Bereich von 100 m^2 , so ergibt sich wegen $\mathbb{E}[Z_A] = 3$ für die Intensität λ der Wert $\lambda = 3/100$.

Die Gewehrkugel trifft einen Baumstamm genau dann, wenn sich im Schusskanal K - es handelt sich dabei um einen Bereich, welcher $d = 100 \text{ m}$ lang und $2r = 0.4 \text{ m}$ breit ist (der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Kugel punktförmig ist) - der Mittelpunkt von mindestens einem Baum befindet. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{Z_K \geq 1\} = 1 - \mathbb{P}\{Z_K = 0\}$ gilt damit

`d = 100; r = 0.2; λ = 0.03;`
`1 - PDF[PoissonDistribution[d 2 r λ], 0]`
`Clear[e, r, λ]`

0.698806

22.2.5 Beispiel (Die mittlere freie Weglänge): Wir betrachten ein ideales Gas, bei dem sich in einem Kubikzentimeter durchschnittlich λ Moleküle befinden, welche wir uns als Kugeln vom Radius r vorstellen. Man bestimme die mittlere freie Weglänge eines Moleküls dieses Gases.



Lösung: Unter einem **idealen Gas** verstehen die Physiker ein Gas, bei dem die einzelnen Moleküle so weit voneinander entfernt sind, dass sie miteinander nicht in Wechselwirkung treten. Die Orte, in denen sich die einzelnen Gasmoleküle zu einem festen Zeitpunkt befinden, bilden dann näherungsweise einen dreidimensionalen Poissonprozess mit Intensität λ (als Volumeneinheit verwenden wir dabei einen Kubikzentimeter).

Wir wählen nun ein Gasmolekül aus und beobachten dessen freie Weglänge X , also die Länge jenes Weges, den dieses Molekül zurücklegt, bis es erstmals mit einem anderen Molekül zusammenstößt. Für die Berechnung der Verteilung der freien Weglänge X unseres Moleküls dürfen wir (auf Grund von tiefliegenden Erkenntnissen über die Dynamik von Poissonprozessen) annehmen, dass sich alle anderen Moleküle in Ruhe befinden. Für alle $x > 0$ gilt damit (mit K_x bezeichnen wir einen Zylinder mit Radius $2r$ und Höhe x)

$$F_X[x] = \mathbb{P}\{X \leq x\} = 1 - \mathbb{P}\{X > x\} = 1 - \mathbb{P}\{Z_{K_x} = 0\} = 1 - e^{-4r^2\pi\lambda x}$$

also ergibt sich für die von uns gesuchte mittlere freie Weglänge (das Integral werten wir mit *Mathematica* aus)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f_X[x] dx = \int_0^\infty x (4r^2\pi\lambda) e^{-4r^2\pi\lambda x} dx = \frac{1}{4r^2\pi\lambda}$$

```
Integrate[x 4 r^2 pi lambda Exp[-4 r^2 pi lambda x], {x, 0, infinity}, Assumptions -> {r > 0, lambda > 0}]
```

$$\frac{1}{4\pi r^2\lambda}$$

22.2.6 Beispiel: In einem Kleiderstoff kommen auf je 100 m Stoff durchschnittlich fünf Fehler. Ein Ballen von 100 m wird in $n = 25$ Stücke zu je 4 m zerschnitten. Wie viele fehlerfreie Stücke sind zu erwarten?



Lösung: Die Fehler im Kleiderstoff bilden einen Poissonprozess mit Intensität λ . Damit ist die Anzahl Z_B der Fehler in einem Bereich B offenbar $\mathcal{P}[\lambda|B]$ -verteilt. Wählt man als Längeneinheit einen Meter, so ergibt sich für die Intensität λ wegen $\mathbb{E}[Z_{[0,100]}] = 5$ der Wert $\lambda = 5/100$. Das laufende Prüfen, ob die einzelnen Stücke, in die der Stoffballen zerschnitten wird, fehlerfrei sind, bildet einen Bernoulliprozess mit Parameter

$$p = \mathbb{P}\{Z_{[0,4]} = 0\} = e^{-4\lambda}$$

Die Anzahl X der fehlerfreien Stücke ist damit $\mathcal{B}[n, p]$ -verteilt. Es sind also $\mathbb{E}[X] = np = 20.4683$ fehlerfreie Stücke zu erwarten.

```
n = 25; lambda = 5/100; p = Exp[-4 lambda];
```

```
n p // N
```

```
Clear[n, lambda, p]
```

```
20.4683
```

22.2.7 Beispiel: Die Positionen der Sonnen in einem Kugelsternhaufen bilden in erster Näherung einen Poissonprozess mit Intensität λ . Man berechne die mittlere Entfernung zweier benachbarter Sonnen.



Lösung: Die Anzahl Z_B der Sonnen in einem Bereich B dieses Kugelsternhaufens ist bekanntlich $\mathcal{P}[\lambda|B]$ -verteilt. Für den Abstand X zweier benachbarter Sonnen dieses Kugelsternhaufens gilt damit (K_x bezeichne dabei eine Kugel mit Radius x ohne ihren Mittelpunkt)

$$\mathbb{F}_X[x] = 1 - \mathbb{P}\{X > x\} = 1 - \mathbb{P}\{Z_{K_x} = 0\} = 1 - e^{-4x^3\pi\lambda/3}$$

also (das Integral werten wir mit Hilfe von *Mathematica* aus)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \mathbb{f}_X[x] dx = \int_0^\infty x (4x^2\pi\lambda) e^{-4x^3\pi\lambda/3} dx = \frac{\Gamma[1/3]}{(36\pi\lambda)^{1/3}}$$

`Integrate[x (4 x^2 π λ) e^{-4 x^3 π λ/3}, {x, 0, ∞}, Assumptions → {λ > 0}]`

$$\frac{\text{Gamma}\left[\frac{1}{3}\right]}{6^{2/3} \pi^{1/3} \lambda^{1/3}}$$

22.2.8 Beispiel (Der Schroteffekt): Wir betrachten einen elektronischen Verstärker. Auch wenn am Eingang des Geräts kein Signal anliegt, treffen dort bekanntlich dennoch Elektronen gemäß einem Poissonprozess mit Intensität λ ein. Wir nehmen an, dass ein einzelnes Elektron, welches zum Zeitpunkt τ beim Eingang des Verstärkers eintrifft, beim Ausgang die Systemantwort

$$s[t, \tau] = \begin{cases} 1 - (t - \tau)/T & \text{für } \tau < t < \tau + T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bewirkt. Der Verstärker sei linear, das heißt, dass sich die Systemantworten der einzelnen Elektronen überlagern. Man bestimme den Erwartungswert $\mathbb{E}[A_t]$ des Signals A_t am Ausgang des Verstärkers zum Zeitpunkt t .

▼

Lösung: Die zum Zeitpunkt t am Ausgang des Verstärkers anliegende Spannung hängt offenbar nur davon ab, wann im Zeitintervall $[t - T, t]$ Elektronen beim Eingang des Verstärkers eintreffen. Unter der Voraussetzung, dass in diesem Intervall n Elektronen beim Eingang des Verstärkers eintreffen, sind die Zeitpunkte X_1, X_2, \dots, X_n ihres Eintreffens wegen [Satz 22.1.5](#) vollständig unabhängig und im Intervall $[t - T, t]$ gleichverteilt. Wegen des [Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) gilt damit für alle $t \in \mathbb{R}$ (man beachte, dass $\mathbb{E}[X_i] = t - T/2$ ist)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_t] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_t | \{Z_{[t-T, t]} = n\}] \mathbb{P}[\{Z_{[t-T, t]} = n\}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n s[t, X_i]\right] \mathbb{P}[\{Z_{[t-T, t]} = n\}] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[1 - (t - X_i)/T] \mathbb{P}[\{Z_{[t-T, t]} = n\}] = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{2} \mathbb{P}[\{Z_{[t-T, t]} = n\}] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[Z_{[t-T, t]}] = \frac{\lambda T}{2} \end{aligned}$$

22.2.9 Beispiel: Die Emission der Elektronen von der Kathode einer Elektronenröhre erfolgt gemäß einem Poissonprozess mit Intensität λ . Wir wollen annehmen, dass die Aufenthaltsdauern der Elektronen in der Elektronenröhre voneinander und von den Zeitpunkten ihrer Emission unabhängige, im Intervall $[0, \tau]$ gleichverteilte Zufallsvariablen A_1, A_2, \dots sind. Die Röhre wird zum Zeitpunkt 0 eingeschaltet. Man berechne die Verteilung der Anzahl N_t der Elektronen, die sich zum Zeitpunkt $t > \tau$ in der Röhre befinden.

▼

Lösung: Unter der Voraussetzung, dass im Zeitintervall $[0, t]$ von der Elektronenröhre genau n Elektronen emittiert werden, sind die Zeitpunkte X_1, X_2, \dots, X_n ihrer Emission wegen [Satz 22.1.5](#) vollständig unabhängig und im Intervall $[0, t]$ gleichverteilt. Für die Wahrscheinlichkeit p , dass sich das i -te dieser n Elektronen zum Zeitpunkt t noch in der Röhre befindet, gilt damit unter Verwendung des [Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) in differentieller Form (unter der Bedingung $\{Z_{[0, t]} = n\}$ sind die Zufallsvariablen X_i und A_i unabhängig; außerdem ist die Zufallsvariable A_i und das Ereignis $\{Z_{[0, t]} = n\}$ unabhängig)

$$\begin{aligned}
 p &= \mathbb{P}[\{X_i + A_i > t\} \mid \{Z_{[0,t]} = n\}] = \\
 &= \int_0^t \mathbb{P}[\{X_i + A_i > t\} \mid \{X_i \in [x_i, x_i + dx_i]\} \cap \{Z_{[0,t]} = n\}] \mathbb{P}[\{X_i \in [x_i, x_i + dx_i]\} \mid \{Z_{[0,t]} = n\}] = \\
 &= \int_0^t \mathbb{P}[\{A_i > t - x_i\}] \mathbb{P}[\{X_i \in [x_i, x_i + dx_i]\} \mid \{Z_{[0,t]} = n\}] = \int_{t-\tau}^t \frac{\tau - t + x_i}{\tau} \frac{1}{t} dx_i = \frac{\tau}{2t}
 \end{aligned}$$

Für alle $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt damit unter Verwendung der [Formel von Bernoulli](#) (bei jedem einzelnen der n im Intervall $[0, t]$ von der Kathode emittierten Elektronen wird mit der Wahrscheinlichkeit p ausgewürfelt, ob sich dieses Elektron zum Zeitpunkt t noch in der Röhre befindet; die Summe werten wir mit *Mathematica* aus)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\{N_t = k\}] &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}[\{N_t = k\} \mid \{Z_{[0,t]} = n\}] \mathbb{P}[\{Z_{[0,t]} = n\}] = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \\
 &= e^{-\lambda \tau/2} \frac{(\lambda \tau/2)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

```
FullSimplify[Sum[Binomial[n, k] p^k (1 - p)^(n - k) Exp[-λ t] (λ t)^n / n!, {n, k, ∞}], 1 > p > 0] /. p -> τ / (2 t)
```

$$\frac{2^{-k} e^{-\frac{\lambda \tau}{2}} (\lambda \tau)^k}{\text{Gamma}[1 + k]}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Anzahl N_t der zum Zeitpunkt t in der Elektronenröhre befindlichen Elektronen mit dem Parameter $\lambda \tau/2$ poissonverteilt ist.

22.2.10 Beispiel: Sei $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ ein eindimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ . Für alle $t \geq 0$ sei die Zufallsvariable S_t gleich $+1$, wenn $Z_{[0,t]}$ gerade ist und -1 wenn $Z_{[0,t]}$ ungerade ist. Für $0 \leq s < t$ ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\{S_t = S_s\}]$ gesucht.

▼

Lösung: Für alle $0 \leq s < t$ gilt (die Zufallsvariable $Z_{[s,t]}$ ist bekanntlich $\mathcal{P}[\lambda(s-t)]$ -verteilt; für die Berechnung der Summe verwenden wir *Mathematica*)

$$\mathbb{P}[\{S_t = S_s\}] = \mathbb{P}[\{Z_{[s,t]} \text{ ist gerade}\}] = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \mathbb{P}[\{Z_{[s,t]} = k\}] = \frac{1}{2} (1 + e^{-2\lambda(t-s)})$$

```
FullSimplify[Sum[PDF[PoissonDistribution[λ (t - s)], k], {k, 0, ∞, 2}]]
```

$$\frac{1}{2} (1 + e^{2 (s-t) \lambda})$$

22.2.11 Beispiel: Man bestimme die Verteilung der Anzahl N der Geraden eines Poisson-Geradenprozesses mit Intensität λ , welche den Einheitskreis schneiden sowie den Erwartungswert $\mathbb{E}[S]$ der Summe S der Längen der in diesem Kreis liegenden Sehnen.

▼

Lösung: Eine Gerade $g[d, \varphi]$ (man vergleiche dazu [Definition 22.1.20](#)) schneidet den Einheitskreis genau dann, wenn $d < 1$ ist. Die Anzahl N der Geraden, welche den Einheitskreis schneiden ist somit $\mathcal{P}[2\pi\lambda]$ -verteilt.

Berücksichtigt man nun die aus der Elementargeometrie bekannte Tatsache, dass zwischen der Länge S einer den Einheitskreis schneidenden Sehne und dem im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Normalabstand D dieser Sehne vom

Ursprung die Beziehung $S^2 = 4(1 + D)(1 - D) = 4(1 - D^2)$ besteht, so gilt für den Erwartungswert $\mathbb{E}[S]$ der Länge dieser Sehne

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[2\sqrt{1 - D^2}] = \int_0^1 2\sqrt{1 - d^2} dd = \pi/2$$

Da die Anzahl N der den Einheitskreis schneidenden Geraden und die Längen S_1, S_2, \dots, S_N der im Einheitskreis liegenden Sehnen offenbar unabhängig sind, folgt aus der [Formel von Wald](#)

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[S_1 + S_2 + \dots + S_N] = \mathbb{E}[S] \mathbb{E}[N] = \lambda \pi^2$$

22.3 Die Gammaverteilung $\mathcal{Gamma}[\alpha, \lambda]$

Wir fassen die bereits bekannten Eigenschaften der Gammaverteilung $\mathcal{Gamma}[\alpha, \lambda]$ zusammen:

22.3.1 Bemerkung: Die Gammaverteilung $\mathcal{Gamma}[\alpha, \lambda]$ besitzt den Träger

$$\mathbb{T} = [0, \infty[$$

die Verteilungsdichte

$$f[z] = \begin{cases} \frac{\lambda^{-\alpha} z^{\alpha-1} e^{-z/\lambda}}{\Gamma[\alpha]} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Verteilungsfunktion

$$F[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \frac{1}{\Gamma[\alpha]} \int_0^z \lambda^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\lambda} dt = \Gamma_r[\alpha, 0, z/\lambda] & \text{für } z \geq 0 \end{cases}$$

Eine $\mathcal{Gamma}[\alpha, \lambda]$ -verteilte Zufallsvariable Y besitzt den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[Y] = \alpha \lambda$$

und die Varianz

$$\mathbb{V}[Y] = \alpha \lambda^2$$

Für Gammaverteilungen mit dem **gleichen!** Parameter λ gilt die Faltungsformel

$$\mathcal{Gamma}[\alpha, \lambda] * \mathcal{Gamma}[\beta, \lambda] = \mathcal{Gamma}[\alpha + \beta, \lambda]$$

Bei der Untersuchung von Poissonprozessen treten ausschließlich Gammaverteilungen der Form $\mathcal{Gamma}[n, 1/\lambda]$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf. Nach dem deutschen Nachrichtentechniker ERLANG nennt man eine derartige Gammaverteilung auch Erlangverteilung mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$ und bezeichnet diese Verteilung mit $\mathcal{E}[n, \lambda]$ (dabei beachte man, dass offenbar $\mathcal{E}[1, \lambda] = \mathcal{E}[\lambda]$ gilt). Für die Verteilungsdichte und die Verteilungsfunktion der Erlangverteilung ergeben sich etwas einfachere und vor allem besser handhabbare Formeln als für die allgemeine Gammaverteilung:

22.3.2 Bemerkung: Die Erlangverteilung $\mathcal{E}[n, \lambda]$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$ besitzt den Träger

$$\mathbb{T} = [0, \infty[$$

die Verteilungsdichte

$$f[z] = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Verteilungsfunktion

$$F[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^k}{k!} & \text{für } z \geq 0 \end{cases}$$

Eine $\mathcal{E}[n, \lambda]$ -verteilte Zufallsvariable Y besitzt den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[Y] = n/\lambda$$

und die Varianz

$$\mathbb{V}[Y] = n/\lambda^2$$

Für Erlangverteilungen mit dem **gleichen!** Parameter λ gilt die Faltungsformel

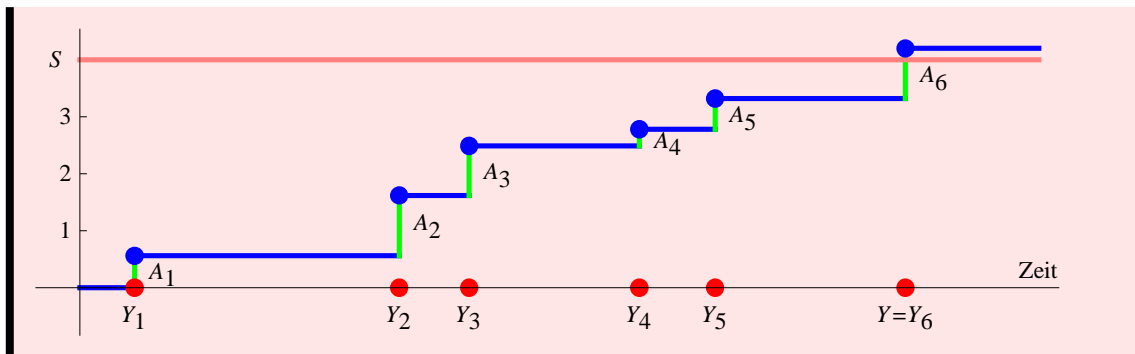
$$\mathcal{E}[m, \lambda] * \mathcal{E}[n, \lambda] = \mathcal{E}[m + n, \lambda]$$



Mit einigen Beispielen zeigen wir wieder, wie sich die Gammaverteilung (es handelt sich dabei eigentlich um die Erlangverteilung) bei der Behandlung von konkreten Problemen einsetzen lässt:

22.3.3 Beispiel: Die Partikel der kosmischen Höhenstrahlung treffen gemäß einem Poissonprozess mit Intensität λ eine Zählvorrichtung und geben dort eine gewisse Energie ab. Wir nehmen an, dass diese von den einzelnen Teilchen an der Zählvorrichtung abgegebenen Energien Zufallsvariable sind, welche sowohl vom Poissonprozess als auch untereinander vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{E}[1, \mu]$ -verteilt sind. Die Zählvorrichtung sendet ihrerseits genau dann einen Impuls aus, wenn die Summe der an der Zählvorrichtung abgegebenen Energien erstmals einen gewissen Schwellwert S überschreitet. Gesucht ist der Erwartungswert der Zeitspanne Y zwischen zwei derartigen Impulsen.

Lösung: Wir beginnen mit unserer Beobachtung zu einem Zeitpunkt, in dem die Zählvorrichtung gerade einen Impuls aussendet und bezeichnen mit Y_n jenen Zeitpunkt, zu dem das n -te Partikelchen die Zählvorrichtung trifft, mit A_n die vom n -ten Partikelchen an der Zählvorrichtung abgegebene Energie und mit N die Anzahl der an der Zählvorrichtung eintreffenden Teilchen, bis die Summe der von ihnen dort abgegebenen Energien erstmals den Schwellwert S überschreitet. Die folgende Zeichnung veranschaulicht eine typische Realisierung dieses Vorgangs:



Aufgrund der [Faltungsformel für Erlangverteilungen](#) ist die Summe $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ der von den ersten n Partikelchen an der Zählvorrichtung abgegebenen Energien $\mathcal{E}[n, \mu]$ -verteilt. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N = n\} &= \mathbb{P}\{N > n - 1\} - \mathbb{P}\{N > n\} = \\ &= \mathbb{P}\{A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} \leq S\} - \mathbb{P}\{A_1 + A_2 + \dots + A_n \leq S\} = \\ &= \left(1 - \sum_{k=0}^{n-2} e^{-\mu S} \frac{(\mu S)^k}{k!}\right) - \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu S} \frac{(\mu S)^k}{k!}\right) = e^{-\mu S} \frac{(\mu S)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Da die Wartezeit Y_n auf das n -te Partikelchen wegen [Satz 22.1.10](#) $\text{Gamma}[n, 1/\lambda]$ -verteilt ist, gilt damit unter Verwendung des [Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) und der Tatsache, dass das offenbar nur von den Energien A_1, A_2, \dots abhängige Ereignis $\{N = n\}$ und die Zufallsvariable Y_n unabhängig sind (die Summe werten wir mit *Mathematica* aus)

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y | \{N = n\}] \mathbb{P}\{N = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_n] \mathbb{P}\{N = n\} = \frac{1 + \mu S}{\lambda}$$

```
Sum[Mean[GammaDistribution[n, 1/λ]] Exp[-μ S] (μ S)^(n-1)/(n-1)!, {n, 1, ∞}]
```

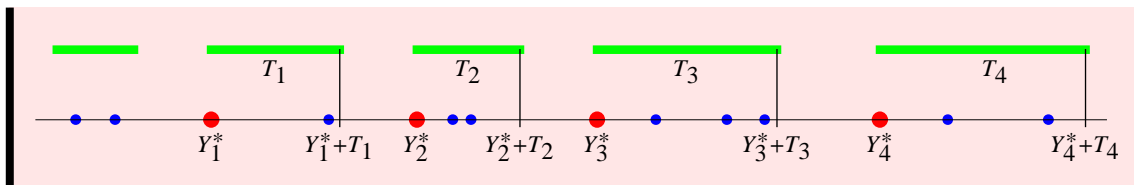
$$\frac{1 + S \mu}{\lambda}$$

22.3.4 Beispiel (Zählgerät erster Art): Die Zeitpunkte, in denen die von einer radioaktiven Substanz emittierten α -Teilchen einen Geigerzähler treffen, bilden bekanntlich einen Poissonprozess mit Intensität λ . Aus physikalischen Gründen registriert ein Geigerzähler aber nicht alle α -Teilchen, die das Gerät treffen. Unter einem **Zählgerät erster Art** versteht man ein Gerät, das nach jedem Zählvorgang für eine (zufällige)

Zeitspanne blockiert ist und während dieser Zeitspanne alle das Gerät treffenden Teilchen völlig ignoriert. Unter der Voraussetzung, dass diese "Totzeiten" T_1, T_2, \dots sowohl vom Prozess der das Gerät treffenden Teilchen als auch untereinander vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{E}[\mu]$ -verteilt sind, bestimme man die Verteilungsdichte $f_{Y_{n+1}^* - Y_n^*}$ der Zeitspanne $Y_{n+1}^* - Y_n^*$ zwischen dem n -ten und $n+1$ -ten registrierten Teilchen.

▼

Lösung: In der folgenden Skizze haben wir jene Zeitpunkte, zu denen Teilchen das Gerät treffen und registriert werden durch rote und jene Zeitpunkte, zu denen Teilchen das Gerät treffen und nicht registriert werden durch blaue Punkte markiert. Die grünen Balken entsprechen den Totzeiten. Die senkrechten schwarzen Linien markieren die Zeitpunkte $Y_1^* + T_1, Y_2^* + T_2, \dots$, zu denen das Gerät wieder aufnahmefähig ist. Bei diesen Zeitpunkten handelt es sich offenbar um Stopzeiten des Poissonprozesses der das Gerät treffenden Teilchen.



Wegen der verallgemeinerten Regenerationseigenschaft zusammen mit [Satz 22.1.6](#) ist die Länge der Zeitspanne $Y_{n+1}^* - (Y_n^* + T_n)$ zwischen dem Zeitpunkt, zu dem das Gerät wieder aufnahmefähig ist und jenem Zeitpunkt, zu dem das nächste Teilchen das Gerät trifft (und damit registriert wird), $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt und natürlich von der Totzeit T_n unabhängig. Die Verteilung der Zeitspanne

$$Y_{n+1}^* - Y_n^* = T_n + (Y_{n+1}^* - (Y_n^* + T_n))$$

zwischen dem n -ten und dem $n+1$ -ten registrierten Teilchen ist damit gleich der Faltung $\mathcal{E}[\mu] * \mathcal{E}[\lambda]$. Für die gesuchte Verteilungsdichte $f_{Y_{n+1}^* - Y_n^*}$ ergibt sich unter Verwendung von *Mathematica* im Fall $\lambda \neq \mu$

$$f_{Y_{n+1}^* - Y_n^*}[y] = \begin{cases} \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda y} - e^{-\mu y}) & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

```
Integrate[PDF[ExponentialDistribution[μ], y - x] PDF[ExponentialDistribution[λ], x], {x, 0, y}]
```

$$\frac{(e^{-y\lambda} - e^{-y\mu}) \lambda \mu}{\lambda - \mu}$$

Aus der verallgemeinerten Regenerationseigenschaft folgt außerdem, dass die Längen dieser Zeitspannen - es handelt sich dabei um die Längen der Intervalle zwischen zwei roten Punkten - vollständig unabhängig sind. Da die Längen dieser Zeitspannen offenbar nicht $\mathcal{E}[\gamma]$ -verteilt sind, handelt es sich beim Prozess der registrierten Teilchen nicht! um einen Poissonprozess.

22.3.5 Beispiel (Zählgerät zweiter Art): Im Unterschied zu Zählgeräten erster Art handelt es sich bei Zählgeräten zweiter Art um Geräte, die nach jedem das Gerät treffenden Teilchen für eine (zufällige) Zeitspanne blockiert sind. Jedes Teilchen, das während dieser Zeitspanne das Gerät trifft, wird zwar nicht registriert, erneuert aber die Totzeit des Geräts. Unter der Voraussetzung, dass diese "Totzeiten" T_1, T_2, \dots sowohl vom Prozess der das Gerät treffenden Teilchen als auch untereinander wieder vollständig unabhängig und identisch $\mathcal{E}[\mu]$ -verteilt sind, bestimme man für ein derartiges Zählgerät die Verteilung der Anzahl N der Teilchen, welche zwischen zwei vom Gerät registrierten Teilchen das Gerät treffen und nicht registriert werden.

▼

Lösung: Das $n+1$ -te Teilchen wird registriert, wenn die vom n -ten Teilchen ausgelöste, $\mathcal{E}[\mu]$ -verteilte Totzeit T_n kleiner ist als die davon unabhängige und wegen [Satz 22.1.13](#) $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilte Pause $Y_{n+1} - Y_n$ zwischen dem n -ten und dem $n+1$ -ten das Gerät treffenden Teilchen. Für die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass das $n+1$ -te Teilchen

registriert wird, gilt daher wegen des [Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) und der Regel über das [Einsetzen einer Bedingung](#) (das Integral werten wir mit *Mathematica* aus)

$$\begin{aligned}
 p &= \mathbb{P}[\{T_n < Y_{n+1} - Y_n\}] = 1 - \mathbb{P}[\{Y_{n+1} - Y_n \leq T_n\}] = \\
 &= 1 - \int_0^\infty \mathbb{P}[\{Y_{n+1} - Y_n \leq T_n\} \mid \{T_n = t\}] d\mathbb{F}_{T_n}[t] = 1 - \int_0^\infty \mathbb{F}_{Y_{n+1} - Y_n}[t] d\mathbb{F}_{T_n}[t] = \frac{\mu}{\lambda + \mu}
 \end{aligned}$$

```
1 - Integrate[CDF[ExponentialDistribution[λ], t] PDF[ExponentialDistribution[μ], t], {t, 0, ∞},
Assumptions -> {λ > 0, μ > 0}]
```

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Interpretiert man das Registrieren eines Teilchens als "Erfolg", so ist die Anzahl N der Teilchen, welche zwischen zwei vom Gerät registrierten Teilchen das Gerät treffen und nicht registriert werden, aufgrund von [Bemerkung 21.1.7](#) damit $\mathcal{NB}[1, \mu/(\lambda + \mu)]$ -verteilt.

22.3.6 Beispiel: Gegeben sei ein Poisson-Geradenprozess $\mathcal{Z} = \{Z_B \mid B \subseteq \Xi\}$ mit Intensität λ . Wir betrachten die Schnittpunkte der zufälligen Geraden dieses Prozesses mit der positiven x -Achse und fragen nach der Verteilung der Abstände $Y_1, Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \dots$ zweier benachbarter Schnittpunkte.

▼

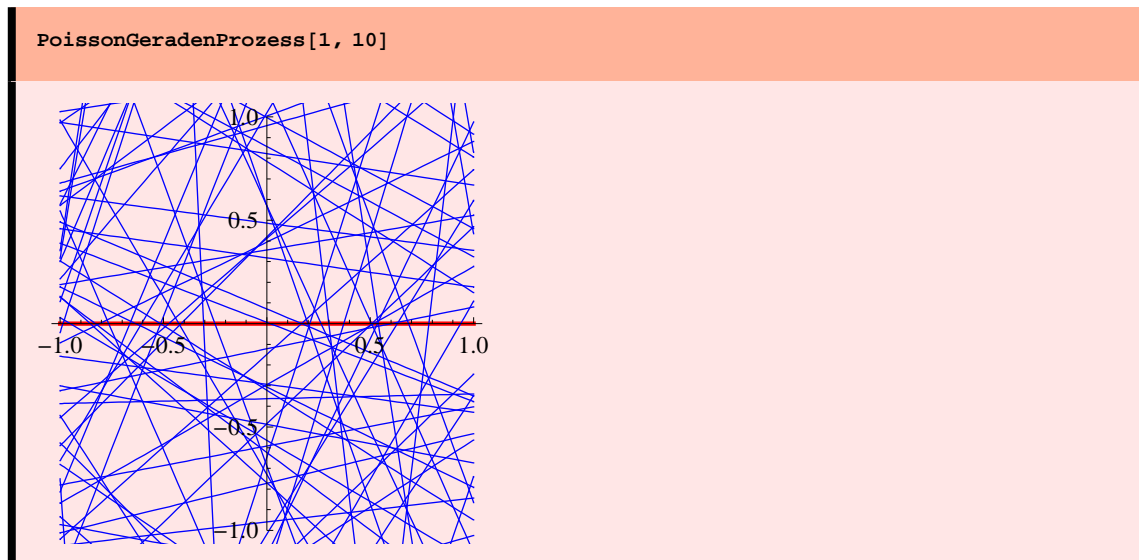
Lösung: Für alle $B \subseteq]0, \infty[$ bezeichne $G[B]$ die Menge

$$G[B] = \{\{d, \varphi\} \in \Xi \mid \frac{d}{\cos[\varphi]} \in B\}$$

Eine einfache geometrische Überlegung zeigt, dass das Ereignis "die Menge B der positiven x -Achse wird von genau k zufälligen Geraden des Poisson-Geradenprozesses getroffen" dem Ereignis $\{Z_{G[B]} = k\}$ entspricht.

Da für paarweise disjunkte Mengen $B_1, B_2, \dots \subseteq]0, \infty[$ die Mengen $G[B_1], G[B_2], \dots$ paarweise disjunkt sind und [damit](#) die Zufallsvariablen $Z_{G[B_1]}, Z_{G[B_2]}, \dots$ vollständig unabhängig sind, und da für alle $B \subseteq]0, \infty[$ die Zufallsvariable $Z_{G[B]}$ wegen $|G[B]| = 2\lambda|B|$ mit dem Parameter $2\lambda|B|$ poissonverteilt ist, handelt es sich beim Prozess der Schnittpunkte dieser zufälligen Geraden des Poisson-Geradenprozesses mit der positiven x -Achse wegen [Bemerkung 22.1.4](#) um einen eindimensionalen Poissonprozess mit Intensität 2λ . Wegen [Satz 22.1.13](#) sind damit die Abstände $Y_1, Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \dots$ zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten vollständig unabhängig und $\mathcal{E}[2\lambda]$ -verteilt.

Diese Tatsache lässt sich mit Hilfe des bereits oben besprochenen Befehls `PoissonGeradenProzess[T, λ]`, mit dem sich typische Realisierungen eines Poisson-Geradenprozesses erzeugen lassen, gut veranschaulichen:



Wir haben bereits gesehen, dass die Erlangverteilung und damit auch die Exponentialverteilung Spezialfälle der Gammaverteilung sind. Nun wollen wir noch kurz auf die Beziehungen zwischen der Gammaverteilung und der Betaverteilung bzw der Gammaverteilung und der Chi-Quadratverteilung eingehen:

22.3.7 Satz: Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig, ist X $\text{Gamma}[\alpha, \lambda]$ -verteilt und Y $\text{Gamma}[\beta, \lambda]$ -verteilt, so ist die Zufallsvariable $Z = X/(X + Y)$ $\text{Beta}[\alpha, \beta]$ -verteilt.

▼

Beweis: Aus dem [Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) in differenzieller Form folgt zusammen mit der Eigenschaft über das [Einsetzen einer Bedingung](#) für alle $0 < z < 1$ (wir entwickeln $1/(z + dz)$ in eine Taylorreihe)

$$\begin{aligned} f_Z[z] &= \frac{1}{dz} \mathbb{P}\left[\left\{\frac{X}{X+Y} \in [z, z+dz]\right\}\right] = \frac{1}{dz} \int_0^\infty \mathbb{P}\left[\left\{\frac{X}{X+Y} \in [z, z+dz] \mid \{X=x\}\right\}\right] f_X[x] dx = \\ &= \frac{1}{dz} \int_0^\infty \mathbb{P}\left[\left\{\frac{x}{x+Y} \in [z, z+dz]\right\}\right] f_X[x] dx = \\ &= \frac{1}{dz} \int_0^\infty \mathbb{P}\left[\left\{Y \in [x/z - x - x/z^2 dz, x/z - x]\right\}\right] f_X[x] dx = \int_0^\infty f_Y[x/z - x] x/z^2 f_X[x] dx \end{aligned}$$

Wir werten dieses Integral mit Hilfe von *Mathematica* aus und vergleichen das Ergebnis mit der Verteilungsdichte der $\text{Beta}[\alpha, \beta]$ -Verteilung:

```
FullSimplify[Integrate[PDF[GammaDistribution[beta, lambda], x/z - x] x/z^2 PDF[GammaDistribution[alpha, lambda], x], {x, 0, infinity}] =
PDF[BetaDistribution[alpha, beta], z], {alpha > 0, beta > 0, lambda > 0, 0 < z < 1}]
```

True

22.3.8 Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt die Gammaverteilung mit den Parametern $\alpha = n/2$ und $\lambda = 2$ mit der Chi-Quadrat Verteilung mit dem Parameter n überein. Speziell gilt $\text{Chi}[2] = \text{Gamma}[1, 2]$.

▼

Beweis: Wir beweisen diese Aussage mit Hilfe von *Mathematica*

GammaDistribution[n/2, 2] == ChiSquareDistribution[n]

True

22.4 Die Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$

Wir wissen [bereits](#), dass die Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$ dem Spezialfall $\mathcal{Gamma}[1, 1/\lambda]$ der Gammaverteilung und damit dem Spezialfall $\mathcal{E}[1, \lambda]$ der Erlangverteilung entspricht.

Wir fassen die bereits bekannten Eigenschaften der Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$ zusammen:

22.4.1 Bemerkung: Die Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$ besitzt den [Träger](#)

$$\mathbb{T} = [0, \infty[$$

die [Verteilungsdichte](#)

$$f[z] = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die [Verteilungsfunktion](#)

$$F[z] = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \int_0^z \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda z} & \text{für } z \geq 0 \end{cases}$$

Eine $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilte Zufallsvariable Y besitzt den [Erwartungswert](#)

$$E[Y] = 1/\lambda$$

und die [Varianz](#)

$$V[Y] = 1/\lambda^2$$

Für die Faltung von Exponentialverteilungen mit [gleichem!](#) Parameter λ gilt (man vergleiche die [Faltungsformel](#) der Erlangverteilung)

$$\underbrace{\mathcal{E}[\lambda] * \mathcal{E}[\lambda] * \dots * \mathcal{E}[\lambda]}_{n \text{ mal}} = \mathcal{E}[1, \lambda] * \underbrace{\mathcal{E}[1, \lambda] * \dots * \mathcal{E}[1, \lambda]}_{n \text{ mal}} = \mathcal{E}[n, \lambda]$$

Abgesehen von ihrem Auftreten im Zusammenhang mit Poissonprozessen verwendet man die Exponentialverteilung vor allem als Lebensdauerverteilung von nicht-alternden Geräten:

22.4.2 Definition: Die stetige Zufallsvariable T mit $\mathbb{P}[\{T > 0\}] = 1$ besitzt die [Nichtalterungseigenschaft](#), wenn für alle $s, t > 0$ die Beziehung

$$\mathbb{P}[\{T > s + t\} | \{T > s\}] = \mathbb{P}[\{T > t\}]$$

gilt. Die Lebensdauer T eines Geräts besitzt somit genau dann die Nichtalterungseigenschaft, wenn sich die restliche Lebensdauer eines zwar gebrauchten aber noch intakten Geräts genau so verhält, wie die Lebensdauer eines neuen gleichartigen Geräts - wenn also das Gerät nicht altert. Typische Beispiele für solche Geräte sind einfache elektronische Bauteile ohne mechanische Abnutzung.

Zentral für die Anwendungen ist der folgende

22.4.3 Satz: Eine stetige Zufallsvariable T mit $\mathbb{P}[\{T > 0\}] = 1$ besitzt genau dann die Nichtalterungseigenschaft, wenn sie $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt ist.



Beweis: Ist die Zufallsvariable T mit dem Parameter λ exponentialverteilt, so gilt für alle $s, t > 0$

$$\mathbb{P}[\{T > s + t\} | \{T > s\}] = \frac{\mathbb{P}[\{T > s + t\}]}{\mathbb{P}[\{T > s\}]} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}[\{T > t\}]$$

womit gezeigt ist, dass eine $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilte Zufallsvariable T die Nichtalterungseigenschaft besitzt. Besitzt nun umgekehrt die Zufallsvariable T die Nichtalterungseigenschaft, so gilt für alle $s, t > 0$

$$\mathbb{P}[\{T > s + t\}] = \mathbb{P}[\{T > s\}] \mathbb{P}[\{T > t\}]$$

und damit wegen der Stetigkeit von T

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbb{P}[\{T > s\}] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[\{T > s + h\}] - \mathbb{P}[\{T > s\}]}{h} = \mathbb{P}[\{T > s\}] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[\{T > h\}] - 1}{h} = \\ &= -\mathbb{P}[\{T > s\}] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[\{T \leq h\}]}{h} = -\mathbb{P}[\{T > s\}] f_T[0] \end{aligned}$$

Diese separable Differentialgleichung für die Funktion $s \rightarrow \mathbb{P}[\{T > s\}]$ mit der Anfangsbedingung $\mathbb{P}[\{T > 0\}] = 1$ besitzt bekanntlich die Lösung

$$\mathbb{P}[\{T > s\}] = e^{-\lambda s}$$

was $\mathbb{P}_T = \mathcal{E}[\lambda]$ zur Folge hat.

22.4.4 Beispiel: Ein nicht-alterndes elektronisches Gerät besitzt eine mittlere Lebensdauer von $\lambda = 12$ Jahren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Gerät innerhalb der Garantiezeit von $g = 2$ Jahren ausfällt. Auf welchen Wert μ müsste die mittlere Lebensdauer dieses Geräts erhöht werden, damit der Prozentsatz der Garantiefälle auf 5 % fällt?



Lösung: Wegen [Satz 22.4.3](#) ist die Lebensdauer T dieses elektronischen Geräts $\mathcal{E}[1/\lambda]$ -verteilt. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{T \leq g\}$, dass dieses Gerät innerhalb der Garantiezeit von $g = 2$ Jahren ausfällt, ergibt sich damit

```
λ = 12; g = 2;
CDF[ExponentialDistribution[1/λ], g] // N
```

```
0.153518
```

Auf welchen Wert μ man die mittlere Lebensdauer dieses Geräts erhöhen müsste, um den Prozentsatz der Garantiefälle auf 5 % zu senken, lässt sich mit dem Befehl `FindRoot` und dem Startwert $\mu = \lambda$ leicht ermitteln:

```
FindRoot[CDF[ExponentialDistribution[1/μ], g] == 0.05, {μ, λ}] // N
Clear[λ, g]
```

```
{μ → 38.9915}
```

22.4.5 Beispiel: In einem Betrieb werden nicht-alternde Geräte mit einer mittleren Lebensdauer von λ Stunden verwendet. Fällt ein Gerät aus, so wird es sofort durch ein neues Gerät ersetzt. Man bestimme die Verteilung der Anzahl N der Geräte, welche während eines Arbeitstages von a Stunden zum Einsatz gelangen.



Lösung: Wegen [Satz 22.4.3](#) sind die Lebensdauern T_1, T_2, \dots der an diesem Tag zum Einsatz gelangenden Geräte $\mathcal{E}[1/\lambda]$ -verteilt. Außerdem darf man annehmen, dass diese Lebensdauern vollständig unabhängig sind. Für $n = 1$ gilt daher

$$\mathbb{P}\{N = 1\} = \mathbb{P}\{T_1 > a\} = e^{-a/\lambda}$$

Für $n \in \{2, 3, \dots\}$ folgt aus dem [Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) in differenzieller Form

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N = n\} &= \mathbb{P}\{T_1 + \dots + T_{n-1} \leq a < T_1 + \dots + T_n\} = \\ &= \int_0^a \mathbb{P}\{T_1 + \dots + T_{n-1} \leq a < T_1 + \dots + T_n \mid \{T_1 + \dots + T_{n-1} = t\}\} f_{T_1 + \dots + T_{n-1}}[t] dt = \\ &= \int_0^a \mathbb{P}\{T_n > a - t\} f_{T_1 + \dots + T_{n-1}}[t] dt \end{aligned}$$

Wegen der [Faltungsformel](#) ist die Summe $T_1 + \dots + T_{n-1}$ aber $\mathcal{E}[n-1, 1/\lambda] = \mathcal{Gamma}[n-1, \lambda]$ verteilt, also gilt (wir werten das Integral mit Hilfe von *Mathematica* aus)

$$\mathbb{P}\{N = n\} = e^{-a/\lambda} \frac{(a/\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Integrate[(1 - CDF[ExponentialDistribution[1/λ], a - t]) PDF[GammaDistribution[n - 1, λ], t], {t, 0, a},
Assumptions -> {n ≥ 2, a > 0}]

$$\frac{a^{-1+n} e^{-\frac{a}{\lambda}} \lambda^{1-n}}{\text{Gamma}[n]}$$

Wir haben damit insgesamt bewiesen, dass die Zufallsvariable $N - 1$ mit dem Parameter a/λ poissonverteilt ist. Dieses Ergebnis hätte man ohne Rechnung auch folgendermaßen erhalten: Die Zeitpunkte, in denen die Geräte ausfallen und durch neue Geräte ersetzt werden, bilden einen Poissonprozess mit Parameter $1/\lambda$. Die Zufallsvariable $N - 1$ entspricht dabei der Anzahl der Erfolge im Intervall $[0, a]$ und ist damit $\mathcal{P}[a/\lambda]$ -verteilt.

22.4.6 Beispiel: Der Zerfall einer radioaktiven Substanz lässt sich (mikroskopisch gesehen) folgendermaßen beschreiben: Die Lebensdauer jedes einzelnen Atoms ist $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt (die Atome altern nicht), wobei der Parameter λ der Zerfallskonstanten der Substanz entspricht. Die einzelnen Atome zerfallen unabhängig voneinander. Unter der Voraussetzung, dass zum Zeitpunkt 0 von dieser Substanz n Atome vorhanden sind, ermittle man die Verteilung der Anzahl N der bis zum Zeitpunkt t zerfallenden Atome.

▼

Lösung: Die Lebensdauern T_1, T_2, \dots, T_n der n zum Zeitpunkt 0 vorhandenen Atome sind vollständig unabhängig und $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt. Also gilt für alle $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ unter Verwendung der [Formel von Bernoulli](#)

$$\mathbb{P}\{N = k\} = \mathbb{P}\left\{ \begin{array}{l} k \text{ der Zufallsvariablen } T_1, T_2, \dots, T_n \text{ sind} \\ \text{kleiner als } t, \text{ die restlichen } n - k \text{ sind größer als } t \end{array} \right\} = \binom{n}{k} (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n-k}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Zufallsvariable N offenbar $\mathcal{B}[n, 1 - e^{-\lambda t}]$ -verteilt ist. Ist n groß und $1 - e^{-\lambda t}$ klein, so ist N wegen des [Gesetzes der seltenen Ereignisse](#) annähernd $\mathcal{P}[n(1 - e^{-\lambda t})]$ -verteilt.

22.4.7 Beispiel: In einer Anlage wird ein störanfälliges Gerät mit $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilter Lebensdauer verwendet. Fällt dieses Gerät aus, so wird sofort seine Reparatur versucht, die mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ gelingt. Das reparierte Gerät ist dann in jeder Hinsicht gleichwertig einem neuen Gerät. Kann das Gerät nicht mehr repariert werden, so wird es durch ein neues, gleichartiges Gerät ersetzt. Man ermittle die Verteilung der Zufallsvariablen T , welche angibt, wie lange man mit n derartigen Geräten auskommt (die Reparaturzeiten werden dabei nicht eingerechnet).

▼

Lösung: Beim Prozess, mit dem beschrieben wird, ob eine Reparatur misslingt (Erfolg) bzw gelingt (Misserfolg), handelt es sich um einen Bernoulliprozess mit Parameter p . Für die Anzahl N der Einsätze, welche mit n Geräten insgesamt durchgeführt werden können, gilt damit $N = Y_{n+1} + n$, wobei Y_{n+1} die Anzahl der Misserfolge vor dem $n + 1$ -ten Erfolg dieses Bernoulliprozesses bezeichnet. Für alle $t > 0$ folgt damit aus dem [Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) (die vollständig unabhängigen, $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilten Dauern der einzelnen Einsätze bezeichnen wir dabei mit T_1, T_2, \dots)

$$\begin{aligned} \mathbb{f}_T[t] &= \mathbb{f}_{T_1+T_2+\dots+T_N}[t] = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{f}_{T_1+T_2+\dots+T_k}[t] \mathbb{P}\{Y_{n+1} = k - n\} = \\ &= p [p \lambda e^{-p \lambda t} \frac{(p \lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}] + (1-p) [p \lambda e^{-p \lambda t} \frac{(p \lambda t)^n}{n!}] \end{aligned}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass die Summe $T_1 + T_2 + \dots + T_k$ auf Grund der [Faltungsformel](#) $\mathcal{E}[k, \lambda]$ -verteilt ist und die Zufallsvariable Y_{n+1} [bekanntlich](#) $\mathcal{NB}[n + 1, p]$ -verteilt ist. Die Summe wurde mit Hilfe von *Mathematica* ermittelt und etwas umgeformt:

```
FullSimplify[Sum[PDF[GammaDistribution[k, 1/λ], t] PDF[NegativeBinomialDistribution[n + 1, p], k - n], {k, n, ∞}]]

$$\frac{e^{-p t \lambda} p (p t \lambda)^n (n - (-1 + p) t \lambda)}{t \text{Gamma}[1 + n]}$$

```

Wir haben damit gezeigt, dass es sich bei der Verteilung \mathbb{P}_T der Zufallsvariablen T offenbar um die Mischung

$$p \mathcal{E}[n, p \lambda] + (1 - p) \mathcal{E}[n + 1, p \lambda]$$

der beiden Erlangverteilungen $\mathcal{E}[n, p \lambda]$ und $\mathcal{E}[n + 1, p \lambda]$ mit den Gewichten p und $1 - p$ handelt.

22.4.8 Beispiel: Gegeben seien zwei voneinander unabhängige Poissonprozesse $\mathcal{Z}^{(1)}$ und $\mathcal{Z}^{(2)}$ auf \mathbb{R} mit den Intensitäten λ und μ . Gesucht ist die Verteilung der Anzahl N der zufälligen Punkte des Prozesses $\mathcal{Z}^{(1)}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden zufälligen Punkten des Prozesses $\mathcal{Z}^{(2)}$.

▼

Lösung: Wir betrachten die $i + 1$ -te Pause des Prozesses $\mathcal{Z}^{(2)}$, deren Länge $T = Y_{i+1}^{(2)} - Y_i^{(2)}$ wegen [Satz 22.1.13](#) $\mathcal{E}[\mu]$ -verteilt ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt dann aus dem [Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) zusammen mit der Tatsache, dass die Anzahl der zufälligen Punkte des Prozesses $\mathcal{Z}^{(1)}$ in einem Intervall der Länge t [bekanntlich](#) $\mathcal{P}[\lambda t]$ -verteilt ist (das Integral werten wir wieder mit *Mathematica* aus)

$$\mathbb{P}[\{N = n\}] = \int_0^\infty \mathbb{P}[\{N = n\} | \{T = t\}] f_T[t] dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\lambda^n}{(\lambda + \mu)^n}$$

```
Integrate[PDF[PoissonDistribution[λ t], n] PDF[ExponentialDistribution[μ], t], {t, 0, ∞},
Assumptions -> {λ > 0, μ > 0, n ∈ Integers, n ≥ 0}]
```

$$\lambda^n \mu (\lambda + \mu)^{-1-n}$$

Wir haben damit gezeigt, dass die Anzahl N der zufälligen Punkte des Prozesses $\mathcal{Z}^{(1)}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden zufälligen Punkten des Prozesses $\mathcal{Z}^{(2)}$ einer $\mathcal{NB}[1, \mu/(\lambda + \mu)]$ -Verteilung genügt.

22.4.9 Beispiel: Eine Versicherung nimmt an, dass die Anzahl N der Unfälle pro Jahr, welche ein durchschnittlicher Autofahrer verursacht, $\mathcal{NB}[1, p]$ -verteilt ist. Außerdem nimmt die Versicherung an, dass die einzelnen Schadenshöhen X_1, X_2, \dots voneinander und von der Anzahl der Unfälle unabhängig und $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt sind. Man ermittle die Verteilung des von einem Autofahrer während eines Jahres verursachten Gesamtschadens Z .

▼

Lösung: Offenbar gilt

$$\mathbb{P}[\{Z = 0\}] = \mathbb{P}[\{N = 0\}] = p$$

Aus dem [Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) zusammen mit der Eigenschaft über das [Einsetzen einer Bedingung](#) ergibt sich außerdem für alle $z > 0$ (wir berücksichtigen dabei, dass die Summe $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ von n unabhängigen, $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilten Zufallsvariablen $\mathcal{E}[n, \lambda]$ -verteilt ist und werten die Summe mit Hilfe von *Mathematica* aus)

$$\begin{aligned} f_Z[z] &= \frac{1}{dz} \mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz]\}] = \frac{1}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz] | \{N = n\}\}] \mathbb{P}[\{N = n\}] = \\ &= \frac{1}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \in [z, z + dz]\}] \mathbb{P}[\{N = n\}] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}[z] f_N[n] = \end{aligned}$$

$$= (1 - p) p \lambda e^{-p \lambda z}$$

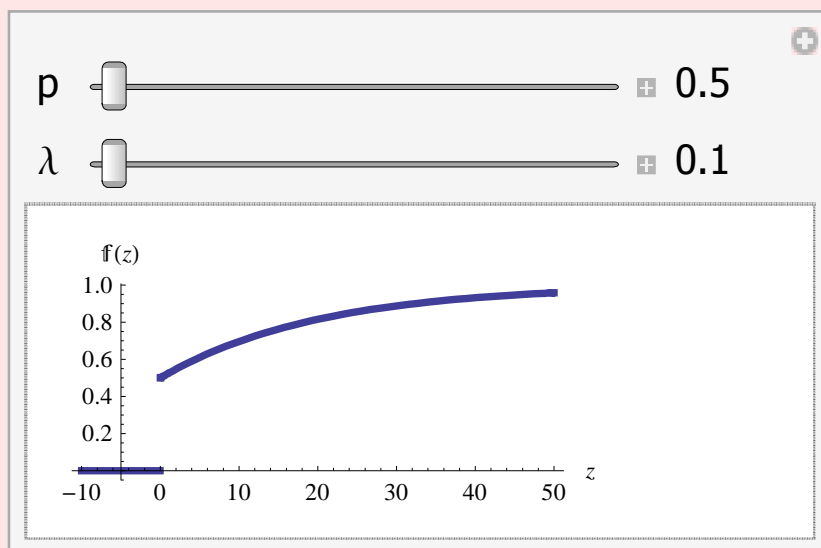
```
FullSimplify[Sum[PDF[GammaDistribution[n, 1/λ], z] PDF[NegativeBinomialDistribution[1, p], n], {n, 1, ∞}], {λ > 0}
-e^{-p λ z} (1 - p) p λ
```

Bei der Verteilung \mathbb{P}_Z des Gesamtschadens Z handelt es sich also um die Mischung

$$\mathbb{P}_Z = p \delta_{\{0\}} + (1 - p) \mathcal{E}[p \lambda]$$

des auf der Menge $\{0\}$ konzentrierten Dirac-Maßes $\delta_{\{0\}}$ mit einer Exponentialverteilung mit Parameter $p \lambda$. Der besseren Veranschaulichung halber plotten wir die Verteilungsfunktion \mathbb{F}_Z dieser gemischten Verteilung:

```
Manipulate[Plot[p UnitStep[z] + (1 - p) CDF[ExponentialDistribution[p λ], z], {z, -10, 50},
  PlotStyle -> Thickness[0.015], AspectRatio -> 0.4, AxesOrigin -> {-5, 0}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {z, f[z]}, ImageSize -> {200, 100}],
  {p, 0.5, 0.9, Appearance -> "Labeled"}, {λ, 0.1, 0.5, Appearance -> "Labeled"}]
```



Abschließend befassen wir uns noch mit dem Zusammenhang zwischen der Exponentialverteilung und der Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$, der Laplaceverteilung sowie der Rayleighverteilung:

22.4.10 Satz: Ist die Zufallsvariable Z im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt und ist $\lambda > 0$, so ist die Zufallsvariable $Y = -\text{Log}[Z]/\lambda$ mit dem Parameter λ exponentialverteilt. (Diese Transformationsformel ist vor allem für die Erzeugung von exponentialverteilten Zufallszahlen von Bedeutung.)

▼

Beweis: Für alle $y > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{-\text{Log}[Z]/\lambda \leq y\} = \mathbb{P}\{Z \geq e^{-\lambda y}\} = 1 - e^{-\lambda y}$$

22.4.11 Satz: Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig und $\mathcal{E}[\lambda]$ -verteilt, so genügt ihre Differenz $Z = X - Y$ einer $\mathcal{L}[0, 1/\lambda]$ -Verteilung.

▼

Beweis: Aufgrund des [Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) und der Regel über das [Einsetzen einer Bedingung](#) gilt für alle $z \in \mathbb{R}$ (man achte dabei genau auf die [Integrationsgrenzen!](#))

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z \in [z, z + dz]\} &= \frac{1}{dz} \int_0^\infty \mathbb{P}\{X - Y \in [z, z + dz] \mid \{Y = y\}\} f_Y[y] dy = \\ &= \int_{\text{Max}[-z, 0]}^\infty f_X[z + y] f_Y[y] dy \end{aligned}$$

Wir werten dieses Integral mit Hilfe von *Mathematica* aus und vergleichen das Ergebnis sowohl für $z < 0$ als auch für $z \geq 0$ mit der Verteilungsdichte der $\mathcal{L}[0, 1/\lambda]$ -Verteilung:

```
FullSimplify[
  Integrate[PDF[ExponentialDistribution[\lambda], z + y] PDF[ExponentialDistribution[\lambda], y], {y, Max[-z, 0], \infty}] =
  PDF[LaplaceDistribution[0, 1/\lambda], z], {\lambda > 0, z < 0}]
FullSimplify[
  Integrate[PDF[ExponentialDistribution[\lambda], z + y] PDF[ExponentialDistribution[\lambda], y], {y, Max[-z, 0], \infty}] =
  PDF[LaplaceDistribution[0, 1/\lambda], z], {\lambda > 0, z \ge 0}]
True
True
```

22.4.12 Satz: Ist die Zufallsvariable Z mit dem Parameter λ exponentialverteilt, so genügt ihre Wurzel $Y = \sqrt{Z}$ einer Rayleighverteilung mit dem Parameter $\sqrt{1/(2\lambda)}$.

▼

Beweis: Für alle $y > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{\{\sqrt{Z} \leq y\}\} = \mathbb{P}\{Z \leq y^2\} = 1 - e^{-\lambda y^2}$$

Dieser Satz ist der Grund dafür, warum in der Technik oft angenommen wird, dass die Amplitude einer zufälligen Schwingungen einer Rayleighverteilung genügt: Von der Leistung einer zufälligen Schwingung wird nämlich oft angenommen, dass sie exponentialverteilt ist. Nun ist aber die Leistung einer Schwingung bekanntlich proportional dem Quadrat der Amplitude dieser Schwingung. Da das Vielfache einer rayleighverteilten Zufallsvariable offenbar wieder rayleighverteilt ist, genügt die Amplitude einer zufälligen Schwingung somit einer Rayleighverteilung.

22.4.13 Beispiel: Von der Schlingeramplitude S eines Schiffes kennt man den Erwartungswert $\mathbb{E}[S] = 3.2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Schlingeramplitude den Wert $s = 5.5$ überschreitet?

▼

Lösung: Aus den obigen Ausführungen geht hervor, dass man annehmen darf, dass die Schlingeramplitude S dieses Schiffes einer Rayleighverteilung genügt, wobei der Parameter σ dieser Rayleighverteilung so bestimmt werden muss, dass $\mathbb{E}[S] = 3.2$ ist. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{S > s\} = 1 - F_S[s]$ gilt damit

```
erw = 3.2; s = 5.5;  
 $\sigma = \sigma /. \text{FindRoot}[\text{Mean}[\text{RayleighDistribution}[\sigma]] = 3.2, \{\sigma, 1\}];$   
1 - CDF[RayleighDistribution[ $\sigma$ ], 5.5]  
Clear[erw, s,  $\sigma$ ]
```

```
0.0982592
```