§25 Stochastische Prozesse

▼

25.1 Begriffsbildungen

Gegeben sei ein W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$, ein Zustandsraum E und eine Parametermenge T.

25.1.1 Definition: Unter einem **stochastischen Prozess** versteht man eine Familie $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t \in T}$ von E-wertigen Zufallsvariablen Z_t auf dem W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$.

Zu dieser Begriffsbildung sind einige Bemerkungen angebracht:

25.1.2 Bemerkung:

a) Ist E eine endliche bzw abzählbare Menge, so spricht man von einem stochastischen Prozess mit **endlichem** bzw **abzählbarem** Zustandsraum.

b) Ist $E = \mathbb{R}$, so spricht man von einem **reellen** stochastischen Prozess.

c) Ist $E = \mathbb{C}$, so spricht man von einem **komplexen** stochastischen Prozess. In diesem Fall lässt sich jede Zufallsvariable Z_t in der Form $Z_t = X_t + i\, Y_t$ schreiben, wobei X_t und Y_t reelle Zufallsvariable sind.

d) Ist $T = \mathbb{N}$ oder $T = \mathbb{Z}$, so spricht man von einem **diskreten** stochastischen Prozess.

e) Ist $T = \mathbb{R}_+$ oder $T = \mathbb{R}$, so spricht man von einem **kontinuierlichen** stochastischen Prozess.

f) Ist $T \subseteq \mathbb{R}^k$, so spricht man von einem **stochastischen Feld**.

Im Rahmen der stochastischen Prozesse schreibt man statt $Z_t[\omega]$ oft $Z[t, \omega]$ und statt Z_t damit $Z[t, \bullet]$. Auf diese Weise soll ausgedrückt werden, dass wir es mit zwei Variablen zu tun haben - einer Variablen t, welche man als "Zeit" interpretiert und einer Variablen ω, welche den "Zufall" beschreibt. So gesehen kann man einen stochastischer Prozess $\mathcal{Z}_T$ auch als Abbildung Z von $T \times \Omega$ in E auffassen.

Wir werden im Folgenden nur stochastische Prozesse behandeln bei denen T gleich $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ bzw $\mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{R}$ und E gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.

25.1.3 Definition: Sei $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t \in T}$ ein stochastischer Prozess.

a) Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung

$$Z^\omega : T \to E \qquad \text{mit} \qquad Z^\omega[t] = Z_t[\omega]$$

der zu ω gehörige **Pfad** (Trajektorie) des stochastischen Prozesses $\mathcal{Z}_T$. Statt Z^ω schreibt man auch $Z[\bullet, \omega]$.

b) Die Menge

$$\Omega_{\mathcal{Z}} = \{Z^\omega \mid \omega \in \Omega\} \subseteq E^T$$

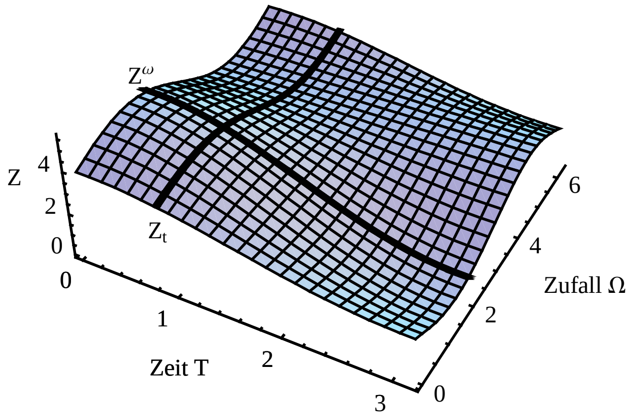
heißt **Pfadmenge** des stochastischen Prozesses $\mathcal{Z}_T$. Die Pfadmenge eines stochastischen Prozesses ist üblicherweise eine wesentlich "kleinere" Menge als E^T.

c) Die Abbildung

$$\mathcal{Z} : \Omega \to E^Z \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{Z}[\omega] = Z^\omega$$

heißt **Zufallsfunktion** des stochastischen Prozesses $\mathcal{Z}_T$.

Mit der folgenden Graphik soll diese Begriffsbildung verdeutlicht:




```
plot1 = Plot3D[(Sin[y] + 1) Cos[x ] + 2.9, {x, 0, Pi}, {y, 0, 2 Pi}, Boxed → False,
    AxesLabel → {"Zeit T", "Zufall Ω", "Z"}, DisplayFunction → Identity];
plot2 = Plot3D[(Sin[y] + 1) Cos[Pi / 4] + 3, {x, Pi / 4, Pi / 4 + 0.05}, {y, 0, 2 Pi},
    DisplayFunction → Identity, Ticks → None];
plot3 = Plot3D[(Sin[2] + 1) Cos[x ] + 3, {x, 0, Pi}, {y, 2, 2.1},
    DisplayFunction → Identity, Ticks → None];
t1 = Graphics3D[Text["Z_t", {0.8, 0, 2.5}]];
t2 = Graphics3D[Text["Z^ω", {0, 2, 5.6}]];
gr = Show[{plot1, plot2, plot3, t1, t2}, DisplayFunction → $DisplayFunction];

Export["stoch_bild1.eps", gr, ImageSize → {550, 250}]
```

```
stoch_bild1.eps
```

Es folgen einige Beipiele für stochastische Prozesse:

25.1.4 Beispiel (Nachrichtenübertragung): Sei $\mathcal{Z}_{\mathbb{N}} = \{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Sequenz der Sendesymbole $Z_n \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[Z_n = z]$ bestimmen die Verteilung der Zufallsvariablen Z. Die Signalquelle erzeugt eine Nachricht $\mathcal{Z}_{\mathbb{N}}$ als Sequenz Z_n, die auch als Modulationssymbole bezeichnet werden. Die so entstehende Zufallsfunktion $Z(t)$ des betrachteten stochastischen Prozesses ist gegeben durch den Signalverlauf über der Zeit, der sich durch die zufällige Auswahl der Sendesympole Z_n ergibt:

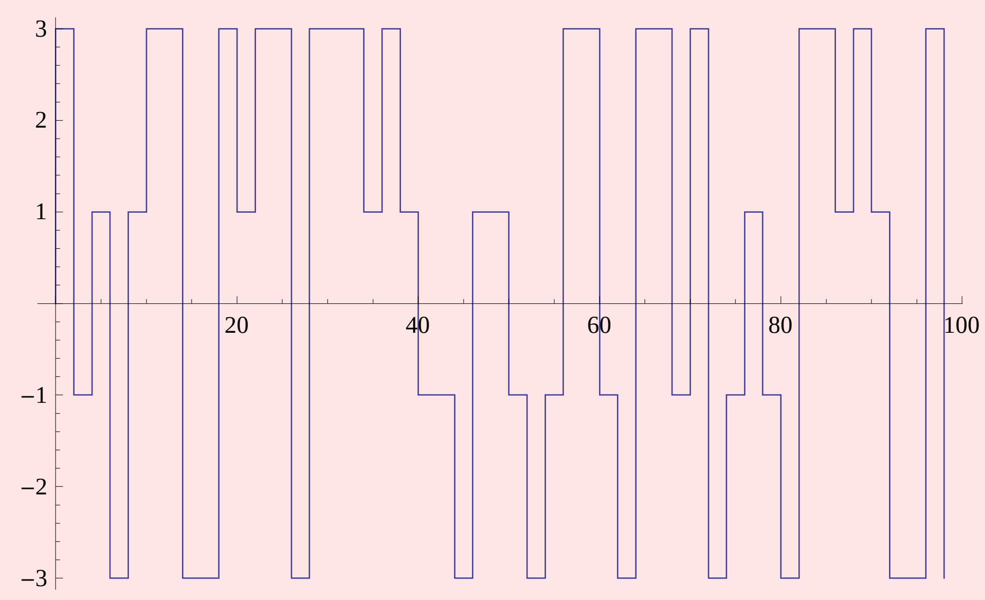
$$Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \operatorname{rect}(t - n\,T)$$

▼

Lösung: Verlauf des Signals über der Zeit.

```
t = 0; state = 0; list1 = {};
While[t < 100,
 {state == -3, a = RandomChoice[{-3, -1, 1, 3}], stateOld = state, state = a,
  list1 = Append[list1, {t, stateOld}], list1 = Append[list1, {t, state}]}; t = t + 2]
```

```
ListPlot[list1, Joined → True]
```



25.1.5 Beispiel: Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von vollständig unabhängigen, $\mathcal{N}[0, 1]$-verteilten Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ und seien $m : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ zwei beliebige Abbildungen. Der diskrete reelle stochastische Prozess

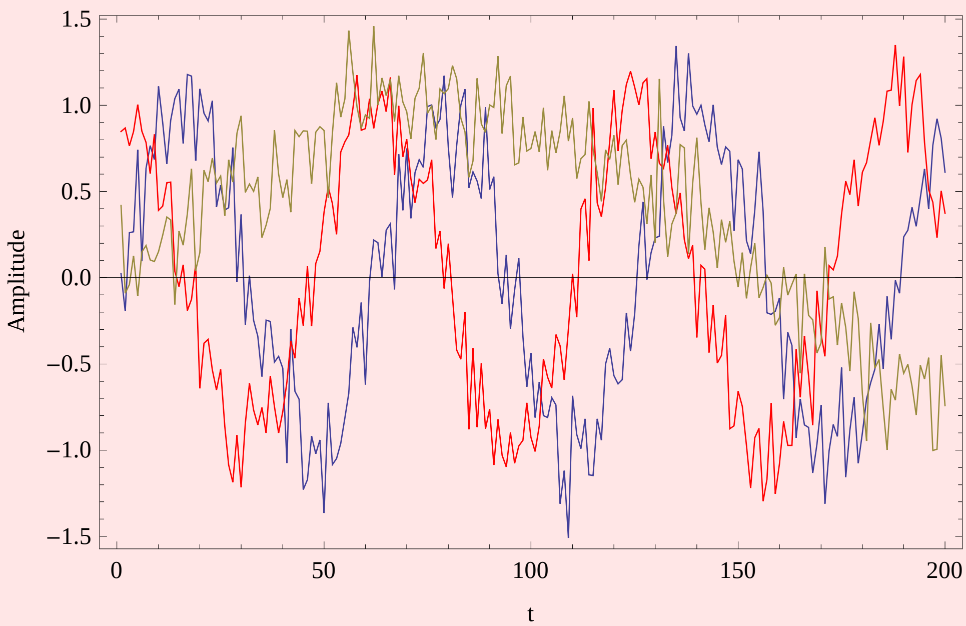
$$\mathcal{Z}_{\mathbb{N}} = \{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad Z_n = m[n] + \sigma[n]\, X_n$$

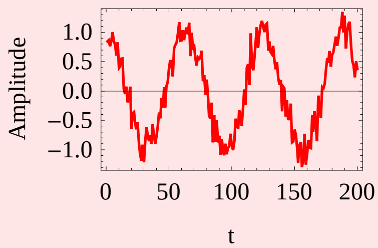
beschreibt einen zeitlich diskreten Messvorgang, bei dem die zeitlich variable Messgröße $m[n]$ durch die normalverteilten Messfehler $\sigma[n]\, X_n$ verfälscht wird.

Mit dem folgenden Befehl wird ein Pfad eines derartigen stochastischen Prozesses im Bereich $1 \leq n \leq n_{\max}$ erzeugt. Dazu müssen die beiden Funktionen m und σ sowie die Intervallgrenze $n_{\max}$ eingegeben werden:

```
m[n_] := Sin[n / 10];
m2[n_] := Cos[n / 10];
m3[n_] := Sin[n / 50];
m4[n_] := Cos[n / 50];
σ[n_] := 1 / 5;
nmax = 200;

punkte = Table[{n, m[n] + σ[n] Random[NormalDistribution[0, 1]]}, {n, 1, nmax}];
punkte2 = Table[{n, m2[n] + σ[n] Random[NormalDistribution[0, 1]]}, {n, 1, nmax}];
punkte3 = Table[{n, m3[n] + σ[n] Random[NormalDistribution[0, 1]]}, {n, 1, nmax}];
punkte4 = Table[{n, m4[n] + σ[n] Random[NormalDistribution[0, 1]]}, {n, 1, nmax}];
gr = ListPlot[{punkte, punkte2, punkte3}, PlotStyle -> {PointSize[0.015], RGBColor[1, 0,
  Frame → True, FrameLabel → {"t", "Amplitude"}]
Clear[m, σ, nmax, punkte]
gr2 = ListPlot[{punkte2}, PlotStyle -> {PointSize[0.015], RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.
  Frame → True, FrameLabel → {"t", "Amplitude"}, ImageSize → {350, 90}]
Clear[m, σ, nmax, punkte]
```






```
meinpfad = "E:\work\Lehre\Seminar\Stochastische_Prozesse";
SetDirectory[meinpfad]
```

```
E:\work\Lehre\Seminar\Stochastische_Prozesse
```

```
Export["sendesignal.eps", gr, ImageSize → {350, 250}]
```

```
sendesignal.eps
```

```
Export["sendesignal_picture.jpg", gr2, ImageSize → {350, 90}]
```

```
sendesignal_picture.jpg
```

25.1.6 Beispiel: Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ paarweise unkorrelierte, quadratisch integrierbare, komplexe Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschiedene reele Zahlen. Der kontinuierliche komplexe stochastische Prozess

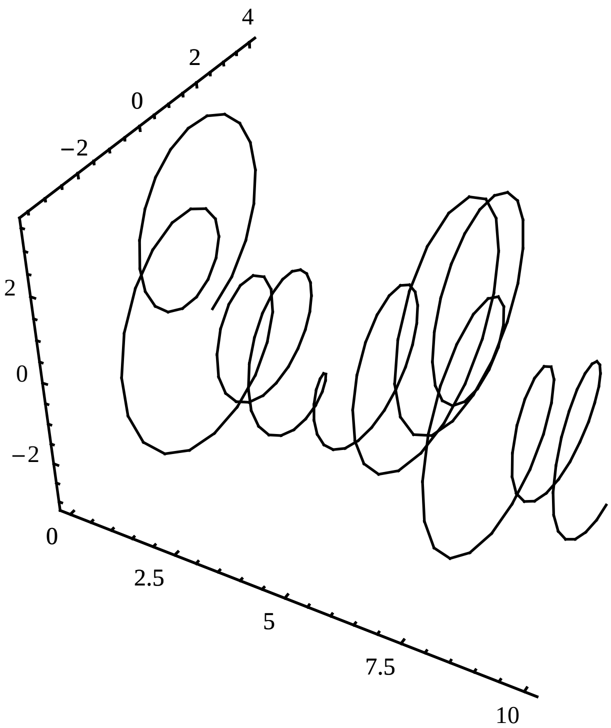
$$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} \qquad \text{mit} \qquad Z_t = \sum_{k=1}^{n} X_k \, \text{Exp}[i \, \lambda_k \, t]$$

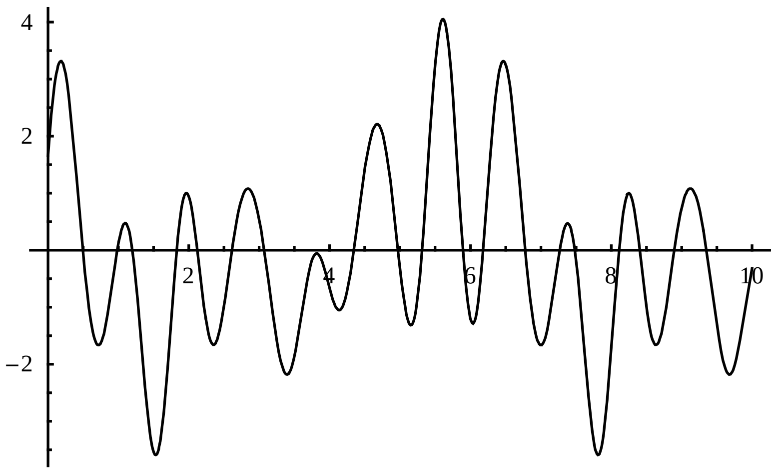
beschreibt die Überlagerung von n unkorrelierten harmonischen Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, den zufälligen Amplituden $\text{Abs}[X_1], \text{Abs}[X_2], \ldots, \text{Abs}[X_n]$ und den zufälligen Phasenwinkeln $\text{Arg}[X_1], \text{Arg}[X_2], \ldots, \text{Arg}[X_n]$.

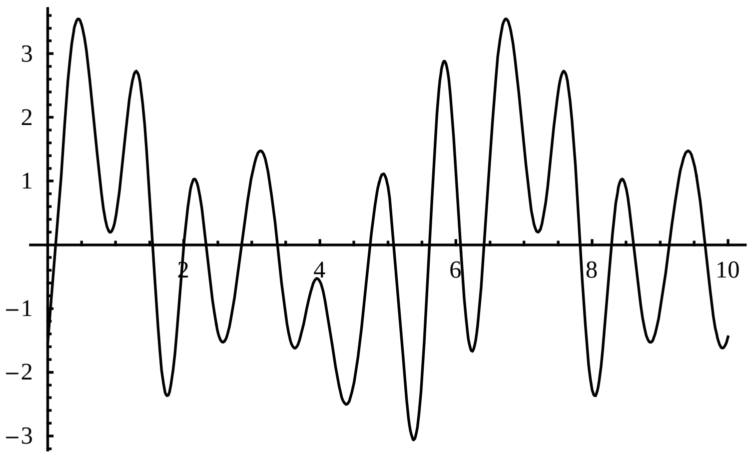
Mit dem folgenden Befehl wird ein Pfad sowie dessen Realteil und Imaginärteil eines derartigen komplexen stochastischen Prozesses im Bereich $1 \leq t \leq t_{\max}$ erzeugt. Dazu muss die Liste $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ der Kreisfrequenzen sowie die Intervallobergrenze $t_{\max}$ eingegeben werden und eine Liste $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ von entsprechend verteilten komplexen Zufallszahlen erzeugt werden:

```
λ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
n = Length[λ];
tmax = 10;
x = Table[(Random[Real, {-1, 1}] + I Random[NormalDistribution[0, 1]]) / Sqrt[i],
    {i, 1, n}];

ParametricPlot3D[{t, Re[Sum[x[[i]] Exp[I λ[[i]] t], {i, 1, n}]],
    Im[Sum[x[[i]] Exp[I λ[[i]] t], {i, 1, n}]]}, {t, 0, 10}, Boxed → False,
   PlotPoints → 200];
ParametricPlot[{t, Re[Sum[x[[i]] Exp[I λ[[i]] t], {i, 1, n}]]}, {t, 0, tmax}];
ParametricPlot[{t, Im[Sum[x[[i]] Exp[I λ[[i]] t], {i, 1, n}]]}, {t, 0, tmax}];
Clear[λ, n, tmax, x]
```







25.1.7 Beispiel: Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von paarweise unkorrelierten, quadratisch integrierbaren, komplexen Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\,|\,X_k\,|^2] < \infty$ und sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine Folge von paarweise verschiedenen reellen Zahlen. Wegen

$$\mathbb{E}\left[\,\left|\,\sum_{k=M}^{M+N} X_k \operatorname{Exp}[i\,\lambda_k\,t]\,\right|^2\right] \leq \sum_{k=M}^{M+N} \mathbb{E}[\,|\,X_k\,|^2]$$

ist die Folge $\left\{\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[X_k \operatorname{Exp}[i\,\lambda_k\,t]]\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Hilbertraum $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}{}^2[\Omega, \mathbb{P}]$ aller quadratisch integrierbaren komplexen Zufallsvariablen auf dem W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$, welche wegen der Vollständigkeit dieses Hilbertraums im quadratischen Mittel gegen eine quadratisch integrierbare, komplexe Zufallsvariable Z_t konvergiert (Z_t ist damit bis auf eine $\mathbb{P}$-Nullfunktion eindeutig bestimmt). Der kontinuierliche komplexe stochastische Prozess

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \qquad \text{mit} \qquad Z_t = \underset{N\to\infty}{l.i.m}\, \sum_{k=1}^{N} X_k \operatorname{Exp}[i\,\lambda_k\,t]$$

beschreibt die Überlagerung von abzählbar vielen unkorrelierten harmonischen Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ den zufälligen Amplituden $\operatorname{Abs}[X_1], \operatorname{Abs}[X_2], \ldots$ und Phasen $\operatorname{Arg}[X_1], \operatorname{Arg}[X_2], \ldots$.

Dieses Beispiel dient als Vorbereitung für die Spektralzerlegung schwach stationärer stochastischer Prozesse. Dort werden wir nämlich lernen, dass sich jeder schwach stationäre Prozess in gewisser Weise als "Überlagerung" von unkorrelierten harmonischen Schwingungen mit zufälligen Amplituden und Phasen darstellen lässt.

25.1.8 Beispiel: Wir betrachten ein Zufallsexperiment, bei dem ein gewisses Ereignis A mit der

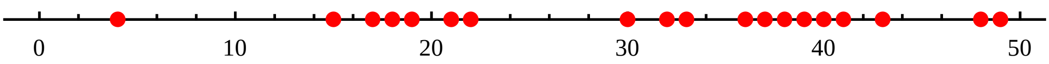
Wahrscheinlichkeit p eintreten kann (tritt das Ereignis A ein, so spricht man von einem **Erfolg**) und wiederholen dieses Zufallsexperiment unabhängig zu den Zeitpunkten 1, 2, … Den diskreten stochastischen Prozess

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{N}} = \{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad Z_n = \text{Anzahl der Erfolge im Intervall }]\,0, n]$$

mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$ nennt man **Bernoulliprozess mit Parameter** $\boldsymbol{p}$.

Mit dem folgenden Befehl wird eine typische Realisierung eines Bernoulliprozesses mit Parameter $p = 0.4$ im Intervall [0, 50] erzeugt. Der zu dieser Realisierung gehörige Pfad besteht dabei aus den in der nach der Zeichnung angeführten Liste von Punkten.

```
BernoulliProzess[50, 0.4]
```




```
{{4, 1}, {15, 2}, {17, 3}, {18, 4}, {19, 5}, {21, 6}, {22, 7}, {30, 8}, {32, 9}, {33, 10},
 {36, 11}, {37, 12}, {38, 13}, {39, 14}, {40, 15}, {41, 16}, {43, 17}, {48, 18}, {49, 19}}
```

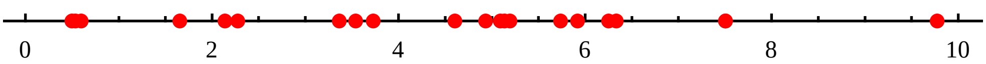
25.1.9 Beispiel: Wir unterteilten $T = \mathbb{R}_+$ in lauter infinitesimale Intervalle der Länge dt und wiederholen in jedem dieser Intervalle unabhängig voneinander ein Zufallsexperiment, bei dem ein gewisses Ereignis A mit der infinitesimalen Wahrscheinlichkeit $\lambda\, dt$ eintreten kann (tritt das Ereignis A ein, so spricht man wieder von einem **Erfolg**). Den kontinuierlichen stochastischen Prozess

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \qquad \text{mit} \qquad Z_t = \text{Anzahl der Erfolge im Intervall }]\,0, t]$$

mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$ nennt man **Poissonprozess mit Intensität** $\boldsymbol{\lambda}$. Natürlich könnte man den Poissonprozess mit Intensität λ auch als stochastischen Prozess mit Zustandsraum $E = \mathbb{R}$ auffassen. In diesem Fall sind alle Pfade rechtsseitig stetige, stückweise konstante Sprungfunktionen mit Sprüngen der Höhe 1.

Mit dem folgenden Befehl wird eine typische Realisierung eines Poissonprozesses mit Intensität $\lambda = 2$ im Intervall [0, 10] erzeugt. Der zu dieser Realisierung gehörige Pfad ist rechtsseitig stetig, beginnt im Ursprung und springt in jedem roten Punkt um eine Einheit nach oben.

```
PoissonProzess[10, 2]
```



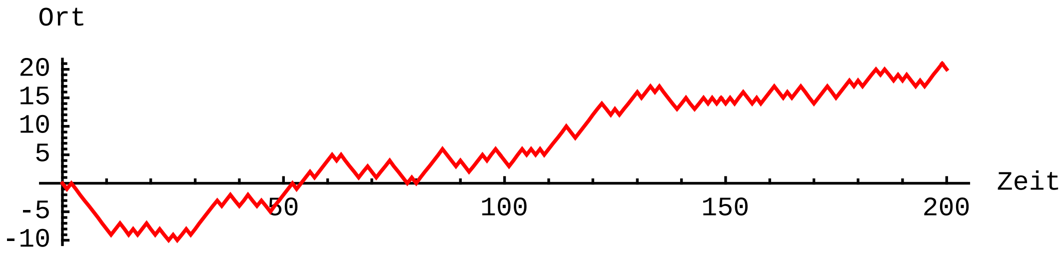
25.1.10 Beispiel: Wir unterteilten die Zahlengerade in lauter "infinitesimale" Intervalle der Länge dt und beobachten ein Teilchen, welches sich mit der Geschwindigkeit $\sigma/\sqrt{dt}$ auf dieser Zahlengeraden bewegt, wobei es sich jeweils bei den Eckpunkten dieser "infinitesimalen" Intervalle unabhängig von seinem bisherigen Weg mit der gleichen Wahrscheinlichkeit für ein Weiterwandern nach rechts bzw links entscheidet und nehmen an, dass dieses Teilchen mit seiner Wanderung im Ursprung beginnt. Den kontinuierlichen stochastischen Prozess

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \qquad \text{mit} \qquad Z_t = \text{Position des Teilchens zum Zeitpunkt } t$$

mit Zustandsraum $E = \mathbb{R}$ nennt man **Brown'sche Bewegung** mit Parameter σ. Alle Pfade dieses Prozesses sind stetig (ein wanderndes Teilchen kann nicht springen) aber fast nirgends differenzierbar.

Mit dem folgenden Befehl wird ein typischer Pfad einer Brown'schen Bewegung mit Parameter $\sigma = 1$ im Intervall $[0, 2]$ erzeugt. Man erkennt an Hand dieser Zeichnung, dass dieser Pfad zwar stetig ist, aber "nirgends" durch eine Tangente approximierbar ist.

```
BrownscheBewegung[200]
```



25.2 Die Verteilung eines stochastischen Prozesses

Sei $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t \in T}$ ein stochastischer Prozess und $\mathcal{Z} : \Omega \to E^Z$ mit $\mathcal{Z}[\omega] = Z^\omega$ die zugehörige Zufallsfunktion.

25.2.1 Definition:

a) Das W-Maß $\mathbb{P}_{\mathcal{Z}}$ auf E^T mit

$$\mathbb{P}_{\mathcal{Z}}[F] = \mathbb{P}[\{\omega \mid Z^\omega \in F\}]$$

heißt **Verteilung** von $\mathcal{Z}_T$.

b) Die Familie

$$\{\mathbb{P}_{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}} \mid n \in \mathbb{N};\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T \text{ paarweise veschieden}\}$$

heißt **Familie der endlichdimensionalen Verteilungen** von $\mathcal{Z}_T$.

Wir erläutern den Begriff der Familie der endlichdimensionalen Verteilungen an zwei Beispielen:

25.2.2 Beispiel: Sei $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Poissonprozess mit Intensität λ. Da ein Poissonprozess unabhängige, poissonverteilte Zuwächse besitzt (das folgt unmittelbar aus der Konstruktionsvorschrift), gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in \mathbb{R}_+$ und alle $0 = k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{f}_{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}}[k_1, k_2, \ldots, k_n] = \mathbb{P}[\{Z_{t_1} = k_1\} \cap \{Z_{t_2} = k_2\} \cap \ldots \cap \{Z_{t_n} = k_n\}] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Exp}[-\lambda (t_i - t_{i-1})] \frac{(\lambda (t_i - t_{i-1}))^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!}$$

25.2.3 Beispiel: Sei $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Brown'sche Bewegung mit Parameter σ. Da eine Brown'sche Bewegung unabhängige, normalverteilte Zuwächse besitzt, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in \mathbb{R}_+$ und alle $0 = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{f}_{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}}[z_1, z_2, \ldots, z_n] = \mathfrak{f}_{Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}}[z_1, z_2 - z_1, \ldots, z_n - z_{n-1}] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2\,(t_i - t_{i-1})}}\ \mathrm{Exp}[-\frac{(z_i - z_{i-1})^2}{2\,\sigma^2\,(t_i - t_{i-1})}]$$

▼

Lösung: Die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen Z_{t_1}, $Z_{t_2} - Z_{t_1}$, …, $Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ folgt direkt aus der Konstruktionsvorschrift. Gesucht ist daher nur noch die Verteilung von $Z_t - Z_s$ mit $0 \le s < t$. Dazu unterteilen wir das Intervall $[s, t]$ in $(t-s)/dt$ Intervalle der Länge dt. In jedem dieser Intervalle ist der Zuwachs unabhängig von den Zuwächsen in den anderen Intervallen mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ gleich

$$\pm \frac{\sigma}{\sqrt{dt}}\, dt = \pm \sigma \sqrt{dt}$$

Nach dem zentralen Grenzverteilungssatz ist der Zuwachs $Z_t - Z_s$ im Intervall $[s, t]$ damit normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz

$$\frac{(s-t)}{dt}\, \sigma^2\, dt = (s-t)\, \sigma^2$$

25.2.4 Bemerkung: Die Familie

$$\{\mathbb{P}_{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}} \mid n \in \mathbb{N};\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T \text{ paarweise veschieden}\}$$

der endlichdimensionalen Verteilungen von $\mathcal{Z}_T$ erfüllt offensichtlich die beiden Verträglichkeitsbedingungen von Kolmogorov

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle paarweise verschiedenen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ und alle $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1} \subseteq E$ gilt

$$\mathbb{P}_{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}}[B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_{n-1} \times E] = \mathbb{P}_{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_{n-1}}}[B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_{n-1}]$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle paarweise verschiedenen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, alle $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq E$ und alle Permutationen π der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$\mathbb{P}_{Z_{t_{\pi[1]}}, Z_{t_{\pi[2]}}, \ldots, Z_{t_{\pi[n]}}}\left[B_{\pi[1]} \times B_{\pi[2]} \times \ldots \times B_{\pi[n]}\right] = \mathbb{P}_{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}}[B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n]$$

Zentral für die Theorie der stochastischen Prozesse ist der folgende Satz von Kolmogorov:

25.2.5 Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle paarweise verschiedenen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ sei $\mathbb{P}_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ ein W-Maß auf der Menge E^n. Erfüllt die Familie

$$\{\mathbb{P}_{t_1, t_2, \ldots, t_n} \mid n \in \mathbb{N};\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T \text{ paarweise veschieden}\}$$

dieser W-Maßen die oben angeführten Verträglichkeitsbedingungen von Kolmogorov (man nennt eine derartige Familie eine **projektive Familie**), so existiert ein eindeutig bestimmtes W-Maß $\mathbb{Q}$ auf E^T mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle paarweise verschiedenen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ die Beziehung

$$\mathbb{Q}_{P_{t_1}, P_{t_2}, \ldots, P_{t_n}} = \mathbb{P}_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$$

gilt. Mit P_t bezeichnen wir dabei die Projektionsabbildung $P_t : E^T \to E$ mit $P_t[f] = f[t]$.

Dieser Satz hat einige bemerkenswerte Konsequenzen:

25.2.6 Bemerkung:

a) Die Verteilung $\mathbb{P}_{\mathcal{Z}}$ eines stochastischen Prozesses $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ ist durch die Familie

$$\{\mathbb{P}_{Z_{t_1},Z_{t_2},\ldots,Z_{t_n}} \mid n\in\mathbb{N};\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T \text{ paarweise veschieden}\}$$

seiner endlichdimensionalen Verteilungen bereits vollständig bestimmt. Diese Aussage ist insofern von besonderem Interesse, da allein aus der Kenntnis, wie sich der stochastische Prozesse in jeweils endlich vielen Zeitpunkten verhält, geschlossen werden kann, wie sich der stochastische Prozess in den (möglicherweise sogar überabzählbar) vielen Zeitpunkten $t\in T$ verhält.

b) Analog zu der Tatsache, wonach die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ einer Zufallsvariablen Z bereits durch die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_Z$ bzw die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ eindeutig bestimmt ist, ist die Verteilung $\mathbb{P}_{\mathcal{Z}}$ eines stochastischen Prozesses $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ durch die Familie

$$\{\mathbb{F}_{Z_{t_1},Z_{t_2},\ldots,Z_{t_n}} \mid n\in\mathbb{N};\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T \text{ paarweise veschieden}\}$$

seiner endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen bzw durch die Familie

$$\{\mathbb{f}_{Z_{t_1},Z_{t_2},\ldots,Z_{t_n}} \mid n\in\mathbb{N};\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T \text{ paarweise veschieden}\}$$

seiner endlichdimensionalen Verteilungsdichten bereits eindeutig bestimmt. (Natürlich ist darauf zu achten, dass die dabei erzeugte Familie von W-Maßen den Verträglichkeitsbedingungen von Kolmogorov genügt.)

Wir machen nun ein wichtiges Beispiel, bei dem die Verteilung eines stochastischen Prozesses durch Angabe der Familie der endlichdimensionalen Verteilungen bestimmt ist. Dazu benötigen wir zuerst die

25.2.7 Definition: Die Abbildung $c: T\times T\to\mathbb{R}$ heißt **positiv definit**, wenn für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle paarweise verschiedenen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} c[t_1, t_1] & c[t_1, t_2] & \ldots & c[t_1, t_n] \\ c[t_2, t_1] & c[t_2, t_2] & \ldots & c[t_2, t_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c[t_n, t_1] & c[t_n, t_2] & \ldots & c[t_n, t_n] \end{pmatrix}$$

symmetrisch und positiv definit ist (eine symmetrische Matrix heißt positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind).

25.2.8 Beispiel: Die Abbildung $c: T\times T\to\mathbb{R}$ sei positiv definit. Unter einem **Gauß'schen Prozess** mit Kovarianzfunktion c versteht man einen rellen stochastischen Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle paarweise verschiedenen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$

$$\mathbb{P}_{Z_{t_1},Z_{t_2},\ldots,Z_{t_n}} = \mathcal{MN}[\{0, 0, \ldots, 0\}, \begin{pmatrix} c[t_1, t_1] & c[t_1, t_2] & \cdots & c[t_1, t_n] \\ c[t_2, t_1] & c[t_2, t_2] & \cdots & c[t_2, t_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c[t_n, t_1] & c[t_n, t_2] & \cdots & c[t_n, t_n] \end{pmatrix}]$$

gilt (die Familie dieser endlichdimensionalen Verteilungen ist auf Grund der Eigenschaften der Multinormalverteilung offenbar konsistent).

25.2.9 Beispiel: Eine Brown'sche Bewegung $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit Parameter σ ist ein Gauß'scher Prozess mit der Kovarianzfunktion $c: \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ mit $c[s, t] = \sigma^2\,\mathrm{Min}[s, t]$.

▼

Lösung: a) Die Abbildung $c:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ mit $c[s,t]=\sigma^2\,\mathrm{Min}[s,t]$ ist postiv definit. Für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle paarweise verschiedenen $0<t_1<t_2<\ldots<t_n\in\mathbb{R}_+$ ist die Matrix

$$\sigma^2\begin{pmatrix}\mathrm{Min}[t_1,t_1] & \mathrm{Min}[t_1,t_2] & \cdots & \mathrm{Min}[t_1,t_n]\\ \mathrm{Min}[t_2,t_1] & \mathrm{Min}[t_2,t_2] & \cdots & \mathrm{Min}[t_2,t_n]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{Min}[t_n,t_1] & \mathrm{Min}[t_n,t_2] & \cdots & \mathrm{Min}[t_n,t_n]\end{pmatrix}=\sigma^2\begin{pmatrix}t_1 & t_1 & \cdots & t_1\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n\end{pmatrix}$$

nämlich positiv definit. Subtrahiert man zuerst die erste Spalte dieser Matrix von allen folgenden Spalten, dann die zweite Spalte der so entstehenden Matrix von allen folgenden Spalten dieser Matrix, …, so erhält man die Matrix

$$\sigma^2\begin{pmatrix}t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ t_1 & t_2-t_1 & 0 & \cdots & 0\\ t_1 & t_2-t_1 & t_3-t_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_1 & t_2-t_1 & t_3-t_2 & \cdots & t_n-t_{n-1}\end{pmatrix}$$

welche offenbar positiv definit ist.

b) Wir berechnen die gemeinsame Verteilungsdichte der Zufallsvariablen $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}$. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $n=2$ und zeigen für alle $0<s<t$

$$\mathfrak{f}_{Z_s,Z_t}[x,y]=\mathfrak{f}_{Z_s,Z_t-Z_s}[x,y-x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s}}\,\mathrm{Exp}[-\frac{x^2}{2\sigma^2 s}]\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}}\,\mathrm{Exp}[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(t-s)}]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{Det}[\boldsymbol{\Sigma}]}}\,\mathrm{Exp}[-\frac{1}{2}\{x,y\}\cdot\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\cdot\{x,y\}^t]$$

Dabei haben wir zur Abkürzung $\boldsymbol{\Sigma}=\sigma^2\begin{pmatrix}s & s\\ s & t\end{pmatrix}$ gesetzt und die Gleichheit mit Hilfe von *Mathematica* überprüft:

```
FullSimplify[PDF[MultinormalDistribution[{0, 0}, σ^2 {{s, s}, {s, t}}], {x, y}] ==
  1/Sqrt[2 π σ^2 s] Exp[-x^2/(2 σ^2 s)] 1/Sqrt[2 π σ^2 (t - s)] Exp[-(y - x)^2/(2 σ^2 (t - s))],
 Assumptions -> {0 < s < t, σ > 0}]
```

```
True
```