§26 Stochastische Prozesse zweiter Ordnung

▼

26.1 Die Kovarianzfunktion von stochastischen Prozessen zweiter Ordnung

Im allgemeinen wird es nicht möglich sein, einen stochastischen Prozess analytisch bzw. durch Angabe seiner Verteilung anzugeben. Man wird sich dann auf die Aufgabe bestimmter Parameter des Prozesses beschränken - ähnlich wie man bei der Charakterisierung von Zufallsvariablen oftmals nur einige Momente und nicht ihre Verteilung zur Verfügung hat.

Sei also $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ mit $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ ein stochastischer Prozess auf dem W-Raum $(\Omega, \mathbb{P})$.

26.1.1 Definition:

$\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ heißt ein **stochastischer Prozess zweiter Ordnung** $:\Longleftrightarrow \forall\, t \in T \;\; \mathbb{E}[\,|Z_t|^2] < \infty$

26.1.2 Bemerkung:

Ist $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T} = \{X_t + i\,Y_t\}_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess zweiter Ordnung, dann sind wegen $\mathbb{E}[X_t{}^2] + \mathbb{E}[Y_t{}^2] = \mathbb{E}[\,|Z_t|^2] < \infty$ die reellen Zufallsvariablen X_t und Y_t für alle $t\in T$ quadratisch integrierbar und somit auch einfach integrierbar.

Es gilt somit:

a) $\forall\, t\in T \qquad \mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[X_t] + i*\mathbb{E}[Y_t] \in \mathbb{C}$

Wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ist weiters

$$\left|\mathbb{E}\left[Z_s * \overline{Z_t}\right]\right|^2 \leq \mathbb{E}[\,|Z_s|^2] * \mathbb{E}[\,|Z_t|^2] < \infty$$

Es gilt somit:

b) $\forall\, s, t\in T \qquad \mathbb{E}\left[Z_s * \overline{Z_t}\right] \in \mathbb{C}$

Von zentraler Bedeutung für unsere weiteren Untersuchungen wird sich die folgende Begriffsbildung erweisen:

26.1.3 Definition:

Ist $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess zweiter Ordnung, so heißt die Abbildung $\mathbb{K} : T \times T \to \mathbb{C}$ mit

$(s, t) \mapsto \mathbb{K}(Z_s, Z_t)$ und

$$\mathbb{K}(Z_s, Z_t) := \mathbb{E}[(Z_s - \mathbb{E}[Z_s])*\overline{(Z_t - \mathbb{E}[Z_t])}] = \mathbb{E}\left[Z_s * \overline{Z_t}\right] - \mathbb{E}[Z_s]*\overline{\mathbb{E}[Z_t]}$$

die **Kovarianzfunktion** von Z_t.

Die **Korrelationsfunktion** von Z_t ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbb{R}(Z_s, Z_t) := \frac{\mathbb{K}(Z_s, Z_t)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_s)}\ \sqrt{\mathbb{V}(Z_t)}}$$

Die **Varianz** ist hier als $\mathbb{V}(Z_t) = \mathbb{E}\left[Z_s * \overline{Z_s}\right] - \mathbb{E}[Z_s]\,\overline{\mathbb{E}[Z_s]}$ definiert.

26.1.4 Bemerkung:

Für den Fall, dass die Erwartungswerte $\mathbb{E}[Z_s] = 0$ und $\mathbb{E}[Z_t] = 0$, sind die Kovarianzfunktion und die Korrelationsfunktion identisch.

Wir wollen nun untersuchen, ob die in Kapitel 1 angeführten Beispiele von stochastischen Prozessen von zweiter Ordnung sind und gegebenfalls ihre Kovarianzfunktion bestimmen:

26.1.5 Beispiel: Falls die Zufallsvariable X quadratisch integrierbar ist, so ist der stochastische Prozess

$\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ mit $Z_t(\omega) := X(\omega)\, f(t)$

von zweiter Ordnung und es gilt ∀ s, t∈T:

$\mathbb{K}(s, t) = \left\{\mathbb{E}\left[\,|\,X\,|^2\right] - \left|\,\mathbb{E}[X]\,\right|^2\right\}\ f(s)\,\overline{f(t)}$

Lösung:

Zeigen, dass stochastischer Prozess von 2. Ordnung ist:

$\mathbb{E}(\,|\,X * f(t)\,|^2) = \mathbb{E}[|\,f(t) * X * \overline{f(t)} * \overline{X}|] = \,|\,f(t)\,|^2 * \mathbb{E}[\,|\,X\,|^2] < \infty$

Berechnung der Kovarianzfunktion:

$$\mathbb{K}(s, t) = \mathbb{E}\left[X * f(s) * \overline{X * f(t)}\right] - \mathbb{E}[X * f(s)] * \overline{\mathbb{E}[X * f(t)]}\ =$$

$$= \mathbb{E}\left[\,|\,X\,|^2\right] * f(s) * \overline{f(t)}\ - \left|\mathbb{E}[X] * f(s) * \overline{\mathbb{E}[X]} * \overline{f(t)}\right| =$$

$$= \mathbb{E}[\,|\,X\,|^2] * f(s) * \overline{f(t)} - \left|\,\mathbb{E}[X]\,\right|^2 * f(s) * \overline{f(t)} =$$

$$= \left\{\mathbb{E}\left[\,|\,X\,|^2\right] - \left|\,\mathbb{E}[X]\,\right|^2\right\} * f(s) * \overline{f(t)}$$

26.1.6 Beispiel: Falls die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ quadratisch integrierbar sind, so ist der kontinuierliche komplexe stochastische Prozess

$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit $Z_t = \sum_{k=1}^n X_k \operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_k\, t\right]$

von zweiter Ordnung und es gilt ∀ s, t∈$\mathbb{R}_+$:

$\mathbb{K}(s, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbb{K}\left(X_k,\ X_l\right) \operatorname{Exp}\left[i\left(\lambda_k\, s\, -\, \lambda_l\, t\right)\right]$

Lösung:

Zeigen, dass stochastischer Prozess von zweiter Ordnung ist:

$$\mathbb{E}(\left|\,\sum_{k=1}^n X_k * \operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_k\, t\right]\right|^2) = \mathbb{E}[|\sum_{k=1}^n X_k * \operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_k\, t\right] * \overline{\sum_{k=1}^n X_k} * \overline{\operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_k\, t\right]}|] =$$

$$= \left|\operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_k\, t\right]\right|^2 * \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\,|\,X_k\,|^2] < \infty$$

Berechnung der Kovarianzfunktion:

$$\mathbb{K}(s, t) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k * \operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_k\, s\right] * \overline{\sum_{l=1}^n X_l * \operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_l\, t\right]}\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k * \operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_k\, s\right]\right] * \overline{\mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^n X_l * \operatorname{Exp}\left[i\,\lambda_l\, t\right]\right]}$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k * \overline{\sum_{l=1}^n X_l}\right] * \operatorname{Exp}\left[i\left(\lambda_k\, s - \lambda_l\, t\right)\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] * \overline{\mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^n X_l\right]} * \operatorname{Exp}\left[i\left(\lambda_k\, s - \lambda_l\, t\right)\right] =$$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \mathbb{K}(X_k, X_l) * \mathrm{Exp}\left[i\,(\lambda_k\, s - \lambda_l\, t)\right]$

26.1.7 Beispiel: Der kontinuierliche komplexe stochastische Prozess

$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit $Z_t = \underset{N \to \infty}{l.i.m} \sum_{k=1}^{N} X_k \,\mathrm{Exp}[i\,\lambda_k\, t]$

und den folgenden Vorraussetzungen:

i) $\forall$ k $\in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{E}\left[X_k\right] = 0$

ii) $\forall$ k$\neq$l $\in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{E}\left[X_k\, \overline{X_l}\right] = 0$ (d.h. die Zufallsvariablen X_1, X_2, ... sind unkorreliert)

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\,|\,X_k\,|^2\right] < \infty$

ist wegen $\mathbb{E}[\,|\,Z_t\,|^2] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\,|\,X_k\,|^2\right] < \infty$ von zweiter Ordnung und $\forall$ s, t$\in \mathbb{R}_+$ gilt:

$\mathbb{K}(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\,|\,X_k\,|^2\right] \mathrm{Exp}\left[i \lambda_k (s - t)\right]$

26.1.8 Beispiel: Ein Gauß'scher Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t \in T}$ mit Kovarianzfunktion ν ist offenbar von zweiter Ordnung und besitzt - wie der Name sagt - die Kovarianzfunktion ν.

Lösung:

Berechnung der Kovarianzfunktion:

$\mathbb{K}(s, t) = \mathbb{E}\left[Z_s * \overline{Z_t}\right] - \mathbb{E}[Z_s] * \overline{\mathbb{E}[Z_t]} = \mathbb{E}[Z_s - \mathbb{E}[Z_s]] * \overline{\mathbb{E}[Z_t - \mathbb{E}[Z_t]]} = \mathbb{K}(Z_s, Z_t) = \nu$

26.1.9 Beispiel: Ein Poissonprozess $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Parameter $\alpha > 0$ ist wegen $\mathbb{E}[Z_t] = \alpha$*t von zweiter Ordnung und $\forall$ s, t$\in \mathbb{R}_+$ gilt:

$\mathbb{K}(s, t) = \alpha\ \min(s, t)$

Lösung:

Für s $\leqslant$ t gilt:

$\mathbb{K}(s, t) = \mathbb{E}[Z_s * Z_t] - \mathbb{E}[Z_s] * \mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[Z_s (Z_t - Z_s + Z_s)] - \alpha * s * \alpha * t =$

$= \mathbb{E}[Z_s (Z_t - Z_s)] + \mathbb{E}\left[{Z_s}^2\right] - \alpha^2 * s * t =$

$= \mathbb{E}[Z_s] * \mathbb{E}[Z_t - Z_s] + \mathbb{E}\left[{Z_s}^2\right] - \alpha^2 * s * t =$

$= \alpha * s * \alpha * (t - s) + \mathbb{V}[Z_s] + (\mathbb{E}[Z_s])^2 - \alpha^2 * s * t =$

$= \alpha^2 * s * t - \alpha^2 * s^2 + \alpha * s + \alpha^2 * s^2 - \alpha^2 * s * t =$

$= \alpha$*s

Da s $\leqslant$ t und $\mathbb{K}$(s, t) = α*s gilt wegen der Symmetrie $\mathbb{K}$(s, t) = α*t wenn t $\leqslant$ s

Daraus folgt nun insgesamt:

$\mathbb{K}$(s, t) = α*min(s, t)

26.1.10 Beispiel: Damit ist auch ein Brown'scher Prozess $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Paramter $\sigma^2 > 0$ von zweiter Ordnung und $\forall$ s, t$\in \mathbb{R}_+$ gilt (analog zu Beispiel 2.1.9):

$\mathbb{K}(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$

Lösung:

Die Lösung erfolg analog dem Beispiel 2.1.9:

Es gilt: $\mathbb{E}[Z_t] = \sigma^2 * t$

Für s ≤ t gilt:

$$\mathbb{K}(s,\ t) = \mathbb{E}[Z_s * Z_t] - \mathbb{E}[Z_s]*\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[Z_s(Z_t - Z_s + Z_s)] - \sigma^2 * s * \sigma^2 * t =$$
$$= \mathbb{E}[Z_s(Z_t - Z_s)] + \mathbb{E}\left[Z_s{}^2\right] - \sigma^4 * s * t =$$
$$= \mathbb{E}[Z_s]*\mathbb{E}[Z_t - Z_s] + \mathbb{E}\left[Z_s{}^2\right] - \sigma^4 * s * t =$$
$$= \sigma^2 * s * \sigma^2 * (t - s) + \mathbb{V}[Z_s] + (\mathbb{E}[Z_s])^2 - \sigma^4 * s * t =$$
$$= \sigma^4 * s * t - \sigma^4 * s^2 + \sigma^2 * s + \sigma^4 * s^2 - \sigma^4 * s * t =$$
$$= \sigma^2 * s$$

Da s ≤ t und $\mathbb{K}$(s, t) = σ^2*s gilt wegen der Symmetrie $\mathbb{K}$(s, t) = σ^2*t wenn t ≤ s

Daraus folgt nun insgesamt:

$\mathbb{K}$(s, t) = σ^2*min(s, t)

26.1.11 Beispiel: Ein stochastischer Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit $Y_t = Z_t - \alpha t$ wobei $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Poissonprozess mit Parameter $\alpha > 0$ ist, ist wegen $\mathbb{E}[Z_t] = \alpha\, t$ von zweiter Ordnung und ∀ s, t∈$\mathbb{R}_+$ gilt:
$\mathbb{K}(s, t) = \alpha\ \min(s, t)$

Lösung:

Für s ≤ t gilt:

$$\mathbb{K}(s,\ t) = \mathbb{E}[(Y_s - \alpha s)*(Y_t - \alpha t)] - \mathbb{E}[Y_s - \alpha s]*\mathbb{E}[Y_t - \alpha t] =$$
$$\mathbb{E}\left[Y_s\, Y_t - Y_s\, \alpha t - Y_t\, \alpha s + \alpha^2 * s * t\right] - (\mathbb{E}[Y_s] - \alpha s)*(\mathbb{E}[Y_t] - \alpha t) =$$
$$= \mathbb{E}[Y_s\, Y_t] - \mathbb{E}[Y_s]*\alpha t - \mathbb{E}[Y_t]*\alpha s + \alpha^2 * s * t - \mathbb{E}[Y_s]*\mathbb{E}[Y_t] + \mathbb{E}[Y_s]*\alpha t + \mathbb{E}[Y_t]*\alpha s - \alpha^2 * s * t =$$
$$= \mathbb{E}[Y_s\, Y_t] - \mathbb{E}[Y_s]*\mathbb{E}[Y_t] \overset{\text{siehe Beispiel 2.1.9}}{=} \alpha * s$$

Da s ≤ t und $\mathbb{K}$(s, t) = α*s gilt wegen der Symmetrie $\mathbb{K}$(s, t) = α*t wenn t ≤ s

Daraus folgt nun insgesamt:

$\mathbb{K}$(s, t) = α*min(s, t)

Als nächstes befassen wir uns mit den Eigenschaften einer Kovarianzfunktion.

Dazu sei also $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess zweiter Ordnung mit der Kovarianzfunktion $\mathbb{K}$. Wenn eine Funktion $\mathbb{K}$(s, t) gegeben ist, die diese Eigenschaft hat kann man immer einen stochastischen Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ finden, der $\mathbb{K}$(s,t) als Kovarianzfunktion hat.

26.1.12 Satz:

a) ∀ t∈T $\mathbb{K}(t, t) \in \mathbb{R}_+$

b) ∀ s, t ∈T $\mathbb{K}(s, t) = \overline{\mathbb{K}(t,\ s)}$

c) $\mathbb{K}$ ist positiv semidefinit (d.h. ∀ n∈ℕ $\forall t_1,\ \ldots,\ t_n \in T$ $\forall x_1,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{C}$ $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbb{K}(t_k,\ t_l) * x_k\, \overline{x_l} \geq 0$)

Beweis:

a) Für eine beliebige quadratisch integrierbare Zufallsvariable Z folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:
$$|\mathbb{E}[Z]|^2 = |\mathbb{E}[Z * 1]|^2 \leq \mathbb{E}\left[|Z|^2\right]*\mathbb{E}\left[1^2\right] = \mathbb{E}\left[|Z|^2\right]$$
was unmittelbar zur Folge hat, dass
∀ t∈T $\mathbb{K}(t, t) = \mathbb{E}\left[|Z_t|^2\right] - |\mathbb{E}[Z_t]|^2 \in \mathbb{R}_+$

b) ist offensichtlich

c) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbb{K}(t_k,\ t_l)*x_k\,\overline{x_l} = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}x_k\,\overline{x_l}*\left(Z_{t_k}-\mathbb{E}\left[Z_{t_k}\right]\right)\left(Z_{t_l}-\mathbb{E}\left[Z_{t_l}\right]\right)] =$

$$= \mathbb{E}[\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\left(Z_{t_k}-\mathbb{E}\left[Z_{t_k}\right]\right)\right|^2] \geq 0$$

26.1.13 Bemerkung:

Die Eigenschaften a) bzw. b) des Satzes 2.1.11 sagen aus, dass die Kovarianzfunktion positiv bzw. symmetrisch ist.

Eine symmetrische Matrix heißt positiv semidefinit, wenn alle Hauptminoren positiv sind (Eigenschaft c) des Satzes 2.1.11)

Umgekehrt charakterisieren diese drei Eigenschaften aber gerade die Kovarianzfunktion sochastischer Prozesse.

Es gilt nämlich:

26.1.14 Satz:

Besitzt eine Abbildung $\mathbb{K}$:T×T→$\mathbb{C}$ die 3 Eigenschaften des Satzes 2.1.11, so gibt es einen (allerdings keineswegs eindeutig bestimmten) stochastischen Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$, dessen Kovarianzfunktion gerade $\mathbb{K}$ ist.

Beweis:
Falls $\mathbb{K}$ reell und positiv definit ist, leistet ein Gauß'scher Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ mit Kovarianzfunktion $\mathbb{K}$ offenbar das Gewünschte.
Den Beweis für den allgemeinen Fall wollen wir nur skizzieren:
Man konstruiert zunächst einen "zweidimensionalen" stochastischen Prozess $\mathcal{Z}^* = \{X_t,\ Y_t\}_{t\in T}$ durch Angabe seiner endlichdimensionalen Verteilungen (siehe Kolmogoroff).
Die gemeinsame Verteilung haben wir mit $\mathbb{P}_{X,Y}$ bezeichnet, also gilt:

$\forall$n$\in\mathbb{N}$ $\forall t_1 < \ldots < t_n\in$T $\quad \mathbb{P}_{X_{t_1},\ \ldots,\ X_{t_n},\ Y_{t_1},\ \ldots,\ Y_{t_n}} = \mathcal{MN}(\!(0, \ldots, 0); \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix})$

mit U:= Re$\begin{pmatrix} \mathbb{K}[t_1, t_1] & \mathbb{K}[t_1, t_2] & \ldots & \mathbb{K}[t_1, t_n] \\ \mathbb{K}[t_2, t_1] & \mathbb{K}[t_2, t_2] & \ldots & \mathbb{K}[t_2, t_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{K}[t_n, t_1] & \mathbb{K}[t_n, t_2] & \ldots & \mathbb{K}[t_n, t_n] \end{pmatrix}$ und V:= Im$\begin{pmatrix} \mathbb{K}[t_1, t_1] & \mathbb{K}[t_1, t_2] & \ldots & \mathbb{K}[t_1, t_n] \\ \mathbb{K}[t_2, t_1] & \mathbb{K}[t_2, t_2] & \ldots & \mathbb{K}[t_2, t_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{K}[t_n, t_1] & \mathbb{K}[t_n, t_2] & \ldots & \mathbb{K}[t_n, t_n] \end{pmatrix}$.

Wobei $\mathcal{MN}((0, \ldots, 0); \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix})$ einer möglicherweise "ausgearteten" mehrdimensionale Normalverteilung mit Mittelwertsvektor (0,0,...,0) und der Kovarianzmatrix $\mathbb{K}$ entspricht.

Da die Matrix $\begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$ im allgemeinen nur positiv semidefinit ist, benötigt man hier den Begriff der "ausgearteten" mehrdimensionalen Normalverteilung, der in der nachfolgenden Bemerkung näher beschrieben wird.

Der Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ mit $Z_t := \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_t + i*Y_t)$ erfüllt dann das Gewünschte.

Es gilt nämlich $\forall$ s, t $\in$T

$$\mathbb{E}[(X_s - \mathbb{E}[X_s])*\overline{(X_t\ -\ \mathbb{E}[X_t])}] = \mathbb{E}[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_s + i*Y_s)*\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X_t + i*Y_t)] =$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathbb{E}[X_s{*}X_t] + i{*}\mathbb{E}[Y_s{*}X_t] - i{*}\mathbb{E}[X_s{*}Y_t] + \mathbb{E}[Y_s{*}Y_t]\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{\text{Re }\mathbb{K}(s, t) + i{*}\text{Im }\mathbb{K}(s, t) + i{*}\text{Im }\mathbb{K}(s, t) + \text{Re }\mathbb{K}(s, t)\} = \mathbb{K}(s, t)$$

26.1.15 Bemerkung:

Bei einer "ausgearteten" n-dimensionalen Normalverteilung liegen alle Punkte auf einer Hyperebene durch den Ursprung (falls der Mittelwertsvektor (0, ..., 0) ist), deren Dimension kleiner als n ist.

26.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit im quadratischen Mittel

Sei $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess zweiter Ordnung auf dem W-Raum (Ω, ℙ). Der Einfachheit halber nehmen wir in diesem Abschnitt an dass für alle $t\in T$ $\mathbb{E}(Z_t)$=0 ist. Damit gilt für die Kovarianzfunktion 𝕂 von $\mathcal{Z}_T$ die vereinfachte Beziehung:

$\forall s,t \in T\ \mathbb{K}(s,t) = \mathbb{E}(Z_s \cdot \overline{Z_t})$

26.2.1 Definition:

a) $\mathcal{Z}_T$ heißt in $t_0\in T$ stetig (im quadratischen Mittel) $\Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0} \mathbb{E}(|Z_t - Z_{t_0}|^2) = 0$

b) $\mathcal{Z}_T$ heißt stetig (im quadratischen Mittel) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{Z}_T$ ist in allen Punkten $t \in T$ stetig (im quadratischen Mittel).

Die so definierte Stetigkeit des stochastischen Prozesses $\mathcal{Z}_T$ lässt sich in einfacher Weise durch die Kovarianzfunktion 𝕂 von $\mathcal{Z}_T$ charakterisieren. Es gilt nämlich:

26.2.2 Satz:

a) $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ ist genau dann in $t_0\in T$ stetig, wenn die Kovarianzfunktion 𝕂 von $\mathcal{Z}_T$ in (t_0,t_0) stetig ist.

b) $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ ist genau dann stetig, wenn die Kovarianzfunktion 𝕂 von z in allen Diagonalpunkten (t,t) mit $t\in T$ stetig ist

Beweis:

a) "$\Longrightarrow$" Infolge der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt für alle s,t ϵT

$|\mathbb{K}(s,t) - \mathbb{K}(t_0, t_0)| = |\mathbb{E}(Z_s \cdot \overline{Z_t}) - \mathbb{E}(Z_{t_0} \cdot \overline{Z_{t_0}})|=$

$=|\mathbb{E}((Z_s - Z_{t_0}) \cdot (\overline{Z_t - Z_{t_0}}) + (Z_s - Z_{t_0}) \cdot \overline{Z_{t_0}} + Z_{t_0}(\overline{Z_t - Z_{t_0}}))| \leq$

$\leq |\mathbb{E}((Z_s - Z_{t_0}) \cdot (\overline{Z_t - Z_{t_0}}))| + |\mathbb{E}((Z_s - Z_{t_0}) \cdot \overline{Z_{t_0}})| + |\mathbb{E}(Z_{t_0} \cdot (\overline{Z_t - Z_{t_0}}))| \leq$

$\leq \sqrt{\mathbb{E}(|Z_s - Z_{t_0}|^2)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(|Z_t - Z_{t_0}|^2)} + \sqrt{\mathbb{E}(|Z_s - Z_{t_0}|^2)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(|Z_{t_0}|^2)} + \sqrt{\mathbb{E}(|Z_{t_0}|^2)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(|Z_t - Z_{t_0}|^2)}$

und für $s\to t_0$ und $t\to t_0$ geht die rechte Seite gegen 0.

"$\Longleftarrow$" Für alle $t\in T$ gilt:

$\mathbb{E}(|Z_t - Z_{t_0}|^2) = \mathbb{E}((Z_t - Z_{t_0}) \cdot (\overline{Z_t - Z_{t_0}}))=$

$\mathbb{K}(t,t) - \mathbb{K}(t_0,t) - \mathbb{K}(t,t_0) + \mathbb{K}(t_0,t_0)$

für $t\to t_0$ geht die rechte Seite gegen 0.

b) ist eine unmittelbare Konsequenz von a).

Von gewisser Bedeutung ist in diesem Zusammenhang der folgende Satz:

26.2.3 Satz:

Aus der Stetigkeit der Covarianzfunktion $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ in allen Diagonalpunkten (t,t) mit $t\in T$ folgt die Stetigkeit von $\mathbb{K}$ in ganz T×T.

Beweis:

Seien s_0 , $t_0 \in T$ beliebig aber fest gewählt. Analog zum vorherigen Beweis zeigt man für alle $s,t \in T$

$|\mathbb{K}(s,t) - \mathbb{K}(s_0, t_0)| = |\mathbb{E}(Z_s \cdot \overline{Z_t}) - \mathbb{E}(Z_{s_0} \cdot \overline{Z_{t_0}})| \leq$

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}(|Z_s - Z_{s_0}|^2)} - \sqrt{\mathbb{E}(|Z_t - Z_{t_0}|^2)} + \sqrt{\mathbb{E}(|Z_s - Z_{s_0}|^2)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(|Z_{t_0}|^2)} + \sqrt{\mathbb{E}(|Z_{s_0}|^2)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(|Z_t - Z_{t_0}|^2)}$$

Nun wurde aber vorausgesetzt, dass $\mathbb{K}$ in den Punkten (s_0, s_0) und (t_0, t_0) stetig ist, was wegen Satz 2.2.2 die Stetigkeit von $\mathcal{Z}_T$ in den Punkten s_0 und t_0 nach sich zieht. Für $s \to s_0$ und $t \to t_0$ geht daher die rechte Seite der obigen Ungleichung gegen 0.

26.2.4 Bemerkung:

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass ein (im quadratischen Mittel) stetiger stochastischer Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Y_t\}_{t\in T}$ keineswegs lauter stetige Pfade haben muss. Als Paradebeispiel dafür sei der stochastische Prozess $Y_t = (Z_t - \alpha t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ erwähnt, wobei $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ein Poissonprozess mit Rate $\alpha>0$ ist. Dieser Prozess erfüllt offenbar alle in diesem Abschnitt verlangten Voraussetztungen und es gilt:

- $\mathcal{Z}_T$ besitzt die in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ stetige Kovarianzfunktione $\alpha \cdot \min(s,t)$ (siehe Beispiel 2.1.11).

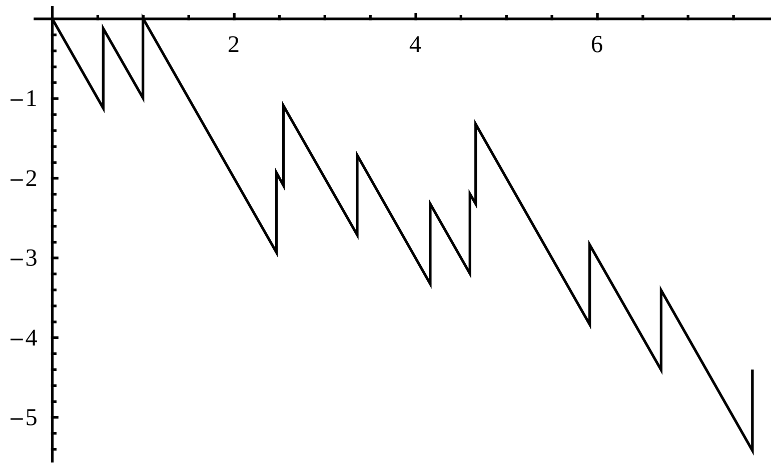
- Alle Pfade von $\mathcal{Z}_T$ sind unstetige "Sägezahnfunktionen"

26.2.5 Beispiel "Sägezahnfunktion": Hier wird ein Pfad des stochastischen Prozesses $Y_T = (Z_t - \alpha t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, wobei $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ein Poissonprozess mit Rate $\alpha > 0$ ist und die Kovarianzfunktion $\alpha \cdot \min(s,t)$ besitzt, simuliert.

Lösung:

```
PoissonProzess[t_, λ_] := Module[{m, liste, punkte},
  m = Random[PoissonDistribution[λ t]];
  liste = Sort[Table[Random[Real, {0, t}], {m}]]]

Liste1 = PoissonProzess[10, 2];
Liste2 = Table[Liste1[[i]] - 2 * 10, {i, 1, Length[Liste1]}];
n = Length[Liste1];
```



26.2.6 Definition:

a) Man sagt ein stochastischer Prozess $\mathcal{Z}_T$ heißt in $t_0 \in T$ **differenzierbar** (im quadratischen Mittel) und besitzt dort die Ableitung $Z'_{t_0} \epsilon\, L^2_{(\mathbb{C})}(\Omega,\mathbb{P})$, wenn die Beziehung $\lim_{t\to t_0} \mathbb{E}\left(\left| \frac{Z_t - Z_{t_0}}{t-t_0} - Z'_{t_0} \right|^2 \right) = 0$ gilt.

(Man beachte, dass Z'_{t_0} dadurch nur bis auf eine Nullfunktion eindeutig bestimmt ist.)

b) Wenn ein stochastischer Prozess $\mathcal{Z}_T$ **differenzierbar** (im quadratischen Mittel) ist und den stochastischen Prozess $\mathcal{Z}_T{}' = (Z'_t)_{t\epsilon T}$ als Ableitung besitzt, dann ist dieser in allen Punkten $t \in T$ differenzierbar (im quadratischen Mittel) und besitzt dort die Ableitung Z'_t.

Wieder lässt sich die so definierte Differenzierbarkeit des stochastischen Prozesses $\mathcal{Z}_T$ in einfacher Weise durch die Covarianzfunktion $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}_T$ charakterisieren. Es gilt nämlich:

26.2.7 Satz:

a) $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ ist genau dann in $t_0 \,\epsilon\, T$ differenzierbar, wenn $\frac{\partial^2 \mathbb{K}(s,t)}{\partial s\, \partial t}$ im Punkt $(t_0,\, t_0)$ existiert.

b) Ist $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ differenzierbar, so existiert $\frac{\partial^2 \mathbb{K}(s,t)}{\partial s\, \partial t}$ in ganz T×T.

c) Zwischen den Kovarianzfunktionen $\mathbb{K}$ von $\mathcal{Z}_T$ und $\mathbb{K}'$ einer Ableitung $\mathcal{Z}_T{}'$ von $\mathcal{Z}_T$ besteht folgender Zusammenhang:

$$\forall s_0,\, t_0 \in T\;\; \mathbb{K}'(s_0,\, t_0) = \frac{\partial^2 \mathbb{K}(s,t)}{\partial s\, \partial t}\bigg|_{\substack{s=s_0\\ t=t_0}}$$

2.2.8 Bemerkung: Mit "$\frac{\partial^2 \mathbb{K}(s,t)}{\partial s\, \partial t}$ existiert im Punkt $(s_0,\, t_0)$" wollen wir ausdrücken, dass

$\lim\limits_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} \frac{1}{(s-s_0)\,(t-t_0)} [\mathbb{K}(s,\, t) - \mathbb{K}(s_0,\, t) - \mathbb{K}(s,\, t_0) + \mathbb{K}(s_0,\, t_0)]$ existiert und von der Art und Weise, wie (s,t) gegen $(s_0,\, t_0)$ konvergiert, unabhängig ist.

Beweis zu Satz 2.2.7:

"$\Longrightarrow$": Für alle $s,t \in T$ gilt offenbar

$$\frac{1}{(s-t_0)\,(t-t_0)}[\mathbb{K}(s,\,t)-\mathbb{K}(t_0,\,t)-\mathbb{K}(s,\,t_0)+\mathbb{K}(t_0,\,t_0)] \;=\; \mathbb{E}\left(\frac{(Z_s-Z_{t_0})\cdot\overline{(Z_t-Z_{t_0})}}{(s-t_0)\cdot(t-t_0)}\right)$$

Weiters gilt:

$$0\le\mathbb{E}\left(\left|\frac{(Z_s-Z_{t_0})\cdot\overline{(Z_t-Z_{t_0})}}{(s-t_0)\cdot(t-t_0)}+\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}\cdot\overline{Z'_{t_0}}-\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}\cdot\overline{Z'_{t_0}}-Z'_{t_0}\cdot\overline{Z'_{t_0}}\right|\right)\le$$

$$\le\mathbb{E}\left(\left|\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}\cdot\left(\frac{\cdot\overline{(Z_t-Z_{t_0})}}{t-t_0}-\overline{Z'_{t_0}}\right)\right|\right)+\mathbb{E}\left(\left|\left(\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}-Z'_{t_0}\right)\cdot\overline{Z'_{t_0}}\right|\right)\le$$

$$\le\sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\left|\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}\right|\right)^2\right)}\cdot\sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\left|\underbrace{\frac{\cdot\overline{(Z_t-Z_{t_0})}}{t-t_0}-\overline{Z'_{t_0}}}_{=0}\right|\right)^2\right)}+\sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\left|\underbrace{\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}-Z'_{t_0}}_{=0}\right|\right)^2\right)\cdot\mathbb{E}\left(\left(|\overline{Z'_{t_0}}|\right)^2\right)}\le 0$$

Damit wurde gezeigt, dass $\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}\cdot\frac{\overline{Z_t-Z_{t_0}}}{t-t_0}$ mit $(s,t)\longrightarrow(t_0,\,t_0)$ im Mittel gegen $Z'_{t_0}\cdot\overline{Z'_{t_0}}$ konvergiert, was damit zur Folge hat, dass $\frac{\partial^2\mathbb{K}(s,t)}{\partial s\,\partial t}$ im Punkt $(t_0,\,t_0)$ existiert und gleich $\mathbb{E}(|Z'_{t_0}|^2)$ ist.

"$\Longleftarrow$": Für alle s,tϵT gilt

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{Z_t-Z_{t_0}}{t-t_0}-\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}\right|^2\right)=$$

$$\lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}}\left(\frac{1}{(t-t_0)^2}[\mathbb{K}(t,\,t)-\mathbb{K}(t,\,t_0)-\mathbb{K}(t_0,\,t)+\mathbb{K}(t_0,\,t_0)]-\frac{1}{(t-t_0)\,(s-t_0)}[\mathbb{K}(t,\,s)-\mathbb{K}(t,\,t_0)-\mathbb{K}(t_0,\,s)+\mathbb{K}(t_0,\,t_0)]-\right.$$

$$\left.\frac{1}{(t-t_0)\,(s-t_0)}[\mathbb{K}(s,\,t)-\mathbb{K}(t_0,\,t)-\mathbb{K}(s,\,t_0)+\mathbb{K}(t_0,\,t_0)]+\frac{1}{(s-t_0)^2}[\mathbb{K}(s,\,s)-\mathbb{K}(s,\,t_0)-\mathbb{K}(t_0,\,s)+\mathbb{K}(t_0,\,t_0)]\right)$$

Da voraussetzungsgemäß $\frac{\partial^2 K(s,t)}{\partial s\,\partial t}$ im Punkt $(t_0,\,t_0)$ existiert folgt daraus

$$\lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}}\mathbb{E}\left(\left|\frac{Z_t-Z_{t_0}}{t-t_0}-\frac{Z_s-Z_{t_0}}{s-t_0}\right|^2\right)=\left[\frac{\partial^2\mathbb{K}(s,t)}{\partial s\,\partial t}-\frac{\partial^2\mathbb{K}(s,t)}{\partial s\,\partial t}-\frac{\partial^2\mathbb{K}(s,t)}{\partial s\,\partial t}+\frac{\partial^2\mathbb{K}(s,t)}{\partial s\,\partial t}\right]\Bigg|_{s=t=t_0}=0$$

Wegen der Vollständigkeit von $L^2_{(\mathbb{C})}(\Omega,\mathbb{P})$ gibt es somit in $Z'_{t_0}\epsilon\, L^2_{(\mathbb{C})}(\Omega,\,\mathbb{P})$mit $\lim_{t\to t_0}\mathbb{E}\left(\left|\frac{Z_t-Z_{t_0}}{t-t_0}-Z'_{t_0}\right|^2\right)=0.$

b) Es ist zu zeigen, dass $\frac{\partial^2\mathbb{K}(s,t)}{\partial s\,\partial t}$ in ganz T×T existiert. Dies geht analog zum Beweis von Satz 2.2.3.

c) Sei $\mathcal{Z}_T=(Z_t)_{t\in T}$ differenzierbar und sei $\mathcal{Z}_T'=\left(Z'_t\right)_{t\in T}$ eine Ableitung von $\mathcal{Z}_T$.

Analog zum ersten Teil des Beweises von a) zeigt man: $\forall s_0,\,t_0\in T\;\frac{\partial^2\mathbb{K}(s,t)}{\partial s\,\partial t}\Bigg|_{\substack{s=s_0\\ t=t_0}}=\mathbb{E}\left(Z'_{s_0}\cdot\overline{Z'_{t_0}}\right)=\mathbb{K}'(s_0,\,t_0)$

Stetige aber nicht differenzierbare stochastische Prozesse treten in den Anwendungen häufig auf.

26.2.9 Beispiel: Der Brown'sche Prozess $\mathcal{Z}_T=\{Z_t\}_{t\in T}$ mit Parameter $\sigma^2>0$ und Kovarianzfunktion $\mathbb{K}(s,t)=\sigma^2\cdot\min(s,\,t)$ ist stetig aber nicht differenzierbar.

Lösung:

Der Brown'sche Prozess ist stetig, da die Kovarianzfunktion stetig ist. Sie ist jedoch nicht differenzierbar da das min(s,t) nicht differenzierbar ist, und dadurch auch die Kovarianzfunktion nicht. Aus Satz 2.2.7 folgt damit, dass der stochastische Prozess nicht differenzierbar ist.

26.2.10 Beispiel: Der Prozess $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ mit $Z_t = A\sin(\omega\cdot t + \varphi)$, wobei $A \in \mathbb{R}$ eine Konstante und φ auf $[0,2\pi]$ gleichverteilt ist, ist differenzierbar.

Lösung:

Um die Differenzierbarkeit des stochastischen Prozesses zu zeigen, genügt es zu laut Satz 2.2.7 zu zeigen, dass die Kovarianzfunktion zweimal differenzierbar ist.

Mit *Mathematica* lässt sich leicht die Kovarianzfunktion berechnen:

```
Integrate[p*A*Sin[w*t + p]*A*Sin[w*s + p], {p, 0, 2 π}]
```

```
  1
-- A^2 π (-2 π Cos[(s - t) w] + Sin[(s + t) w])
  2
```

Die Kovarianzfunktion lautet also: $\mathbb{K}(s,t) = -\frac{1}{2} A^2 \pi (-2\pi \operatorname{Cos}[(s-t) w] + \operatorname{Sin}[(s+t) w])$

Diese Funktion ist zweimal differenzierbar, also ist auch der stochastische Prozess differenzierbar.