Kapitel 2. Zufallsvariable

Bisher wurde das Zufallsexperiment explizit durch die Versuchsanordnung und durch den dahinter stehenden, das Zufallsexperiment eindeutig beschreibenden, Wahrscheinlichkeitsraum angegeben. Die Wahrscheinlichkeiten für die in der σ-Algebra enthaltenen zufälligen Ereignisse wurden jeweils direkt berechnet. In vielen praktischen Anwendungen ist aber die genaue Beschreibung des Zufallsexperiments von untergeordneter Bedeutung. Überwiegend wird das zufällige Ereignis durch eine messbare reellwertige Größe bzw. Variable beschrieben. Diesen Sachverhalt beschreiben wir durch das Konzept einer Zufallsvariablen, also einer Variablen mit zufälligem reellen Wert. Die Zufallsvariable wird durch eine Abbildung des Ereignisraumes Ω in die reellen Zahlen formal definiert und mathematisch eingeführt.

Zufallsvariable X

Definition 2.3 (Zufallsvariable) *Eine Abbildung X, die den Ereignisraum Ω in die reellen Zahlen abbildet (vgl. Abbildung 2.2):*

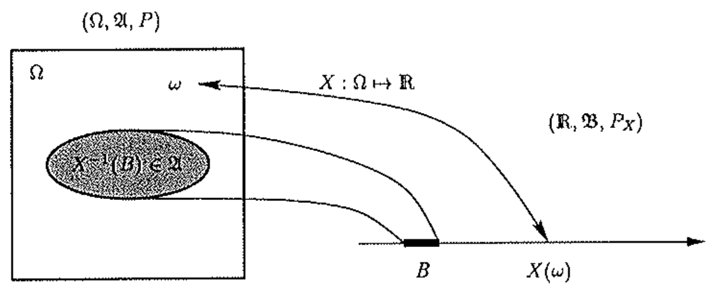
$$X: \quad \Omega \mapsto \mathbb{R} \tag{2.3}$$

*heißt **Zufallsvariable** auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, wenn für alle $B \in \mathfrak{B}$ (Borel-Mengen) das Ereignis*

$$X^{-1}(B) = \{\omega | \omega \in \Omega \text{ und } X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{A} \tag{2.4}$$

ein Element der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist.

*Eine solche Abbildung wird als **messbar** bezeichnet. Zufallsvariablen sind also messbare Abbildungen von Wahrscheinlichkeitsräumen in Euklidische Räume.* ○



Wir sprechen dann nicht mehr von den zufälligen Ereignissen, sondern alternativ von der oder den Zufallsvariablen. Der eigentliche Grund für dieses Vorgehen liegt aber in der einheitlichen Beschreibungsweise von Zufallsvariablen durch geeignete Funktionen. Das tatsächliche Zufallsexperiment tritt in den Hintergrund und die formale Eigenschaft der Zufallsvariablen X spielt künftig die zentrale Rolle.

Beispiele für Zufallsvariable

- **Augensumme beim Werfen von drei Würfeln**

  Wahrscheinlichkeitsraum:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}, i = 1,2,3\}$$

  Abbildung:

$$X := \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \end{cases}$$

- **Maximum und Minimum eines Temperaturverlaufs**

  Wahrscheinlichkeitsraum:

$$\Omega = x(t) \quad \text{(stetig)}$$

  Abbildung:

$$X := \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{Temperatur}\, x(t) \rightarrow (\max\{x(t)\}, \min\{x(t)\}) \end{cases}$$

Neuer Wahrscheinlichkeitsraum

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung ist zunächst ein Zufallsexperiment beschrieben durch das Tripel eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Die Zufallsvariable X wird auf diesen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ angewandt. Durch die Einführung der Zufallsvariablen X wird ein neuer Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_X, \mathfrak{B}, P_X)$ gebildet.

Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X

Definition 2.4 (Wahrscheinlichkeitsverteilung) *Ist $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, so wird ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß P_X durch die folgende Abbildung von der Borel-Menge $\mathfrak{B}$ in die reellen Zahlen bzw. in das Intervall $[0,1]$ definiert:*

$$P_X : \mathfrak{B} \mapsto [0,1] \quad \textit{mit} \quad P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) \tag{2.5}$$

P_X ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Mengensystem der Borel-Menge $\mathfrak{B}$.

Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß P_X enthält sämtliche charakteristischen Eigenschaften der Zufallsvariablen X. Sämtliche Eigenschaften der Kolmogorovschen Definition sind selbstverständlich auch für das neue Wahrscheinlichkeitsmaß P_X erfüllt und übertragen sich in logischer Folge von dem bisherigen Wahrscheinlichkeitsmaß P.

Durch diese geschickte Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_X ist ein neuer Wahrscheinlichkeitsraum entstanden. Der neue Ereignisraum ist $\Omega_X = \mathbb{R}$. Das Mengensystem der σ-Algebra ist durch die Borelsche-Menge $\mathfrak{B}$ beschrieben und das Wahrscheinlichkeitsmaß ist P_X. Der neue Wahrscheinlichkeitsraum wird durch das folgende Tripel formal angegeben:

$$(\Omega_X = \mathbb{R}, \mathfrak{B}, P_X)$$

Dieser neu definierte Wahrscheinlichkeitsraum ist für die charakteristische Beschreibung der Zufallsvariablen X von Bedeutung und enthält sämtliche Eigenschaften des ursprünglichen Zufallsexperiments einschließlich der Zufallsvariablen X. ○

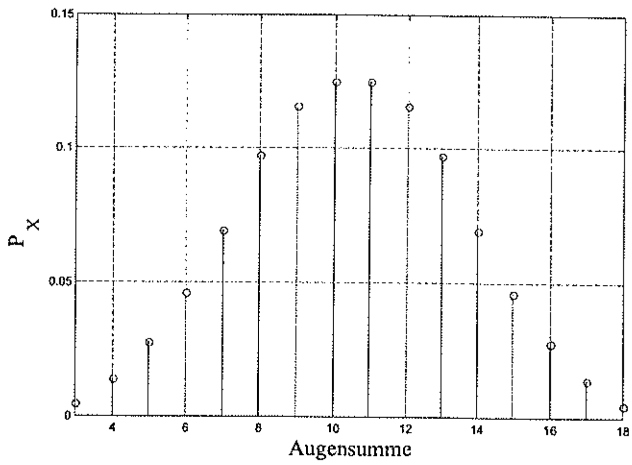
Beispiel 2.3 (Augensumme beim Werfen mit drei Würfeln)

Das folgende Beispiel beschreibt das Wahrscheinlichkeitsmaß P_X für den Sonderfall einer diskreten Zufallsvariablen, indem die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten einer bestimmten Augensumme beim zufälligen Werfen mit drei Würfeln berechnet werden.

Man berechnet die Wahrscheinlichkeit, mit der die diskrete Zufallsvariable X den Wert k annimmt.

$$P_X(\{k\}) = P(\{X = k\}) = P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega | \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = k\})$$

Durch systematische Variation der vorgegebenen Zahl k entsteht eine vom Parameter k abhängige Funktion (vgl. Abbildung 2.3). △



Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X

Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable X Werte annimmt, die kleiner sind als der Punkt x auf der rellen Achse ist dabei von zentraler Bedeutung und wird auf den Begriff der Verteilungsfunktion führen. Durch systematische Variation des Punktes, bzw. des Parameters x entsteht eine Funktion, die für jeden beliebigen Punkt x die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der die Zufallsvariable X Werte annimmt, die kleiner sind als der Punkt x. Die so entstehende, von x abhängige Funktion, wird Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X genannt.

Definition 2.5 (Verteilungsfunktion) *Ist X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so heißt die Abbildung*

Verteilungsfunktion F_X

$$F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1] \tag{2.6}$$

mit

$$F_X(x) := P([X \leq x]) = P(\{\omega | \omega \in \Omega \wedge X(\omega) \leq x\}) \tag{2.7}$$

*die **Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X**.* ○

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

- $F_X(x)$ ist normiert:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \tag{2.8}$$

- $F_X(x)$ ist monoton nicht abnehmend:

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \tag{2.9}$$

- $F_X(x)$ ist rechtsseitig stetig

$$\lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x) \tag{2.10}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable X Werte im Intervall $x_0 < X \leq x_1$ annimmt, kann mit dem Konzept der Verteilungsfunktion relativ einfach wie folgt berechnet werden:

$$P_X(x_0 < X \leq x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_0) \tag{2.11}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, mit der genau eine einzige reelle Zahl x angenommen wird, berechnet sich aus:

$$P_X(X = x) = F_X(x) - \lim_{h \to 0} F_X(x-h) \tag{2.12}$$

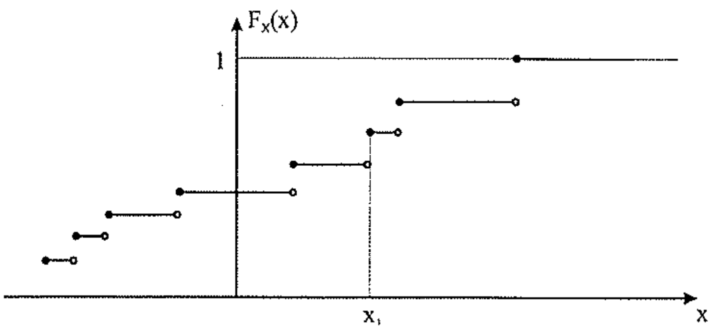
Die letzte Eigenschaft ist insbesondere für die Betrachtung von Zufallsvariablen mit diskretem Wertevorrat von Bedeutung. Nur in diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable X einen der möglichen diskreten Werte $[X = k]$ annimmt, von Null verschieden. Für Zufallsvariable mit einem kontinuierlichen Wertevorrat ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable X eine definierte reelle Zahl x annimmt, gleich Null.

Verteilungsfunktion für diskrete Zufallsvariable

Definition 2.6 (Diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß) *Eine Zufallsvariable X bzw. deren Wahrscheinlichkeitsmaß P_X heißt* ***diskret****, wenn X höchstens abzählbar viele verschiedene Werte annimmt und die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ damit eine Stufenfunktion über dem Parameter x darstellt.*

Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ für eine diskrete Zufallsvariable X ergibt sich somit als Summe von Wahrscheinlichkeiten der diskreten Werte $x_k \leq x$:

$$F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} f_X(x_k) = \sum_{x_k \leq x} P[X = x_k].$$



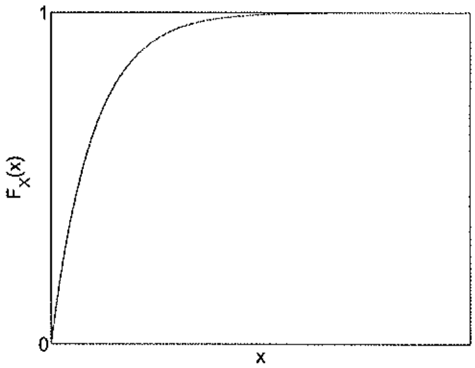
Verteilungsfunktion für kontinuierliche (stetige) Zufallsvariable

Definition 2.7 (Stetiges/kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß) *Eine Zufallsvariable X bzw. deren Wahrscheinlichkeitsmaß P_X heißt* ***stetig*** *oder* ***kontinuierlich****, wenn X überabzählbar viele verschiedene reelle Werte annimmt und die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ als Stammfunktion einer nichtnegativen, stückweise stetigen Funktion f_X dargestellt werden kann. In diesem Fall muss also die folgende Bedingung für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ erfüllt sein:*

$f_X(x) = \frac{\mathbb{P}[X \in (x, x+dx)]}{dx}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi \tag{2.13}$$

Die Funktion $f_X(x)$ heißt ***Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) der Zufallsvariablen*** *X.* ○



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für diskrete Zufallsvariable

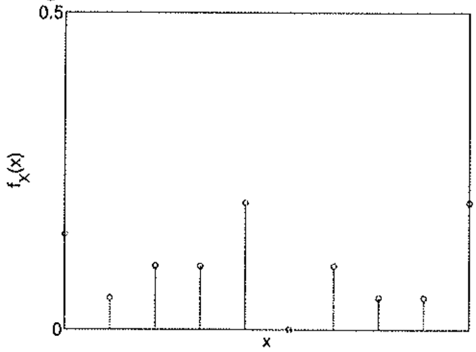
Wahrscheinlichkeitsdichte f_X

Definition 2.8 (Wahrscheinlichkeitsdichte) *Wenn eine Zufallsvariable X diskrete Werte annimmt, so heißt die Abbildung*

$$f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad f_X(x) := P_X(\{X = x\}) \tag{2.14}$$

die ***Wahrscheinlichkeitsdichte***[1] ***der Zufallsvariablen*** *X.* ○

1) Verteilungsdichte, Probability Density Function (PDF)



Das Wahrscheinlichkeitsmaß P_X und damit auch die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ einer diskreten Zufallsvariablen X sind durch Angabe der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ bereits vollständig beschrieben.

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} f_X(x) \tag{2.15}$$

Beispiele für diskrete Zufallsvariable:

- **Alternativverteilung A_p:**

$$\begin{aligned} f_X(1) &= p \quad \text{mit} \quad 0 < p < 1 \\ f_X(0) &= 1 - p \end{aligned}$$

  Anwendungsbeispiel: Bitfehleranalyse für eine binäre Übertragungsstrecke mit zufälligen Fehlern

- **Binominialverteilung $B_{n,p}$:** Wir betrachten ein Zufallsexperiment, in dem eine Zufallsvariable Y_i, die einer Alternativverteilung gehorcht, n-mal gewürfelt und anschließend aufsummiert wird:

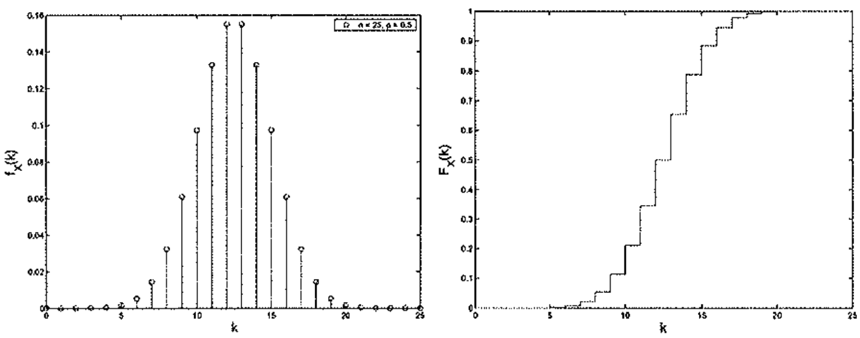
$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

  Die resultierende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dieser diskreten Zufallsvariablen X_n ist im Folgenden angegeben und wird als Binomialverteilung bezeichnet.

$$B_{n,p}(k) := f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{2.16}$$

  Abbildung 2.7 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ und die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ einer diskreten binomialverteilten Zufallsvariablen X.

  Anwendungsbeispiel: Bitfehler in einem übertragenen Datenpaket mit insgesamt n Bits



Binomialverteilung

$$f_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{für } k \geq 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad E\{X\} = np \leftarrow$$

$$F_X(k) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} f_X(i) & \text{für } k \geq 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad Var\{X\} = np(1-p)$$

werden später formal eingeführt

- **Poisson-Verteilung** Π_λ: Für die Herleitung der Poisson-Verteilung wird ein Modell einer Binomialverteilung betrachtet, mit der Zufallsvariablen X_n,

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Zusätzlich werden folgende Annahmen getroffen:

a) Die Wahrscheinlichkeit p, mit der das Ereignis eintritt, ist extrem klein ($p \longrightarrow 0$). Es handelt sich also um ein sehr seltenes Ereignis.

b) Es wird eine große Anzahl n von Einzelexperimenten zur Berechnung der Zufallsvariablen X_n durchgeführt ($n \to \infty$).

c) Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X_n ist wie folgt definiert:

$$E\{X_n\} = \sum_{x=0}^{n} x B_{n,p}(x) = np = \lambda$$

und wird unabhängig von n als konstant angenommen. Diese mittlere als fest angenommene Ankunftsrate λ bestimmt gleichzeitig auch die Auftrittswahrscheinlichkeit $p = \frac{\lambda}{n}$.

Wir interessieren uns unter diesen Annahmen für die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable $X_n = k$ ist, falls n gegen unendlich wächst:

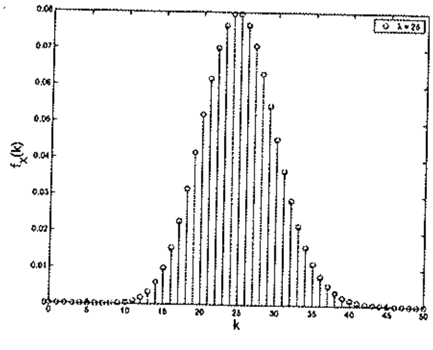
$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

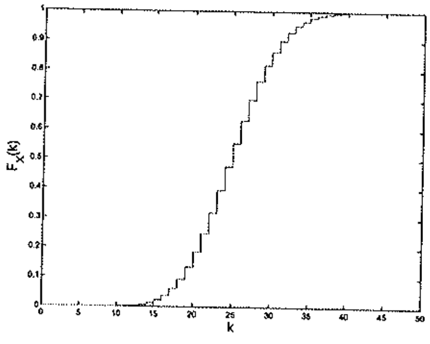
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} & \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Diese sich aus dem obigen Grenzübergang ergebende diskrete Zufallsvariable X, mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$\boxed{\Pi_\lambda(k) := P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} \qquad (2.17)$$

wird als **poissonverteilt** bezeichnet.





Beispiel 2.4 (Anwendungsbeispiel zur Poissonverteilung)

Frage: Auf einer Fläche von 5 cm^2 seien 1000 Staubpartikel (in etwa gleichverteilt über der betrachteten Fläche). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, auf einer Teilfläche von 5 mm^2 genau 6 Partikel zu finden?

Lösung: Gedanklich lässt sich die Teilfläche in eine sehr große Anzahl n Bereiche aufteilen (Abbildung 2.9). Hierbei wird die Wahrscheinlichkeit p, in einem Bereich ein Partikel anzutreffen, verschwindend klein. Dabei ist das Produkt pn jedoch konstant.

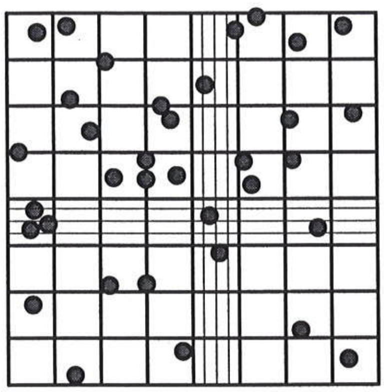


Abbildung 2.9: Illustration der gedanklichen Zerlegung der mit Staubpartikeln bedeckten Fläche

Hier ist die Zufallsvariable X die Anzahl der Partikel auf einer Fläche von 5 mm^2. Der Erwartungswert von X ist damit

$p = \frac{1}{500/5}$ Auftrittswahrsch. $p =$

$$\lambda = \frac{1000}{\frac{500\ mm^2}{5\ mm^2}} = 10.$$

$\lambda = n \cdot p$

In jedem Kästchen der Fläche 5 mm^2 befinden sich also im Mittel genau 10 Partikel. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, mit der sich genau 6 Partikel in einem Kästchen befinden lässt sich mit Hilfe der Poisson Verteilung also folgendermaßen berechnen:

$$P(X = 6) = \Pi_\lambda(6) \approx 0.063$$

Demgegenüber ist die Wahrscheinlichkeit genau 10 Partikel auf der gleichen Fläche zu finden wesentlich größer:

$$P(X = 10) = \Pi_\lambda(10) \approx 0.125$$

△

Poissonverteilung

$$f_X(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{für } k \geq 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad E\{X\} = \lambda$$

$$F_X(k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} & \text{für } k \geq 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad Var\{X\} = \lambda$$

Verteilungsdichte für stetige Zufallsvariable

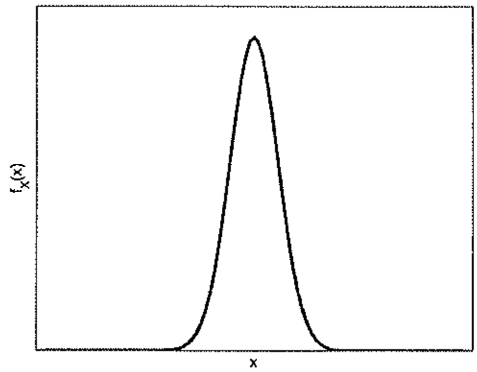
Definition 2.9 *Wenn eine Zufallsvariable X kontinuierliche Werte annimmt, so heißt die Abbildung*

$$f_X : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty), \tag{2.18}$$

für die gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \tag{2.19}$$

*die **Wahrscheinlichkeitsdichte** der Zufallsvariablen X.* ○



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi) d\xi \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_X(x) = F'_X(x).$$

Beispiele für kontinuierliche Zufallsvariable

- **Gleichverteilung**

  Ein wichtiges Beispiel für eine kontinuierliche Zufallsvariable ist durch die sogenannte Gleichverteilung gegeben. Diese Zufallsvariable nimmt nur Werte in einem vorgegebenen festen Intervall auf der Achse der reellen Zahlen an. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist eine Konstante innerhalb des betrachteten Intervalls. Mit den gängigen Programmiersprachen können sehr einfach auf jedem Rechner gleichverteilte Zufallsvariable im Intervall $[0, 1]$ erzeugt werden.

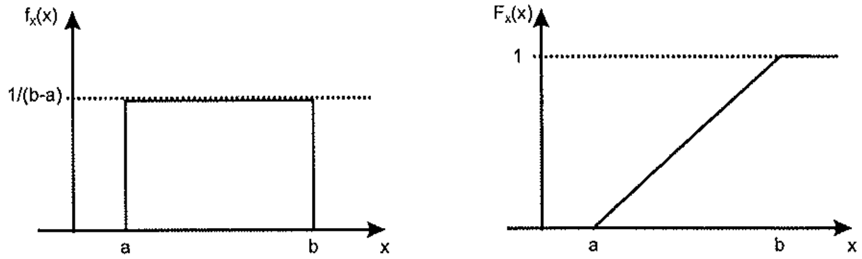


Abbildung 2.11: Gleichverteilung

Anwendungsbeispiel: Modellierung von Quantisierungsrauschen

Gleichverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b], a < b; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad E\{X\} = \frac{a+b}{2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases} \qquad Var\{X\} = \frac{1}{12} \cdot (b-a)^2$$

- **Gauß- bzw. Normalverteilung**

Die vermutlich im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtigste Zufallsvariable ist die Gaußsche bzw. normalverteile Zufallsvariable. Die Bezeichnung geht auf den berühmten deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß zurück, der am 30. April 1777 in Braunschweig geboren wurde, an der Universität in Helmstedt promovierte und am 23. Februar 1855 in Göttingen starb.

Eine Gaußsche Zufallsvariable wird zur Modellierung von zufälligen, additiv überlagerten Fehlern herangezogen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standard-Normalverteilung ist:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Allgemeine Normalverteilung:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Hierbei bezeichnet σ die Standardabweichung (vgl. Abschnitt 3.4.2).

Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ kann leider nicht in mathematisch geschlossener Form, sondern nur als Integral über der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angegeben werden (vgl. Anhang B.1).

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2} d\xi \tag{2.21}$$

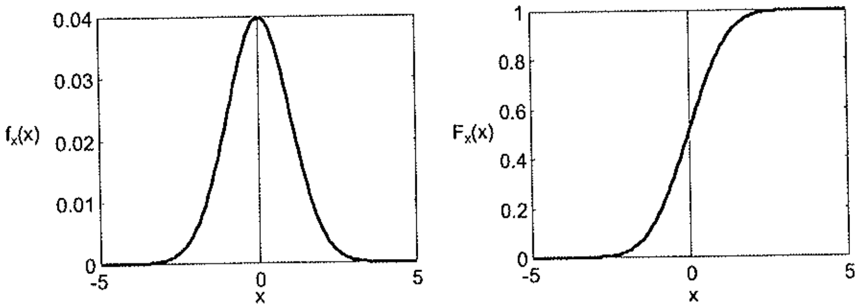


Abbildung 2.12: Normalverteilung

Normalverteilung	
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$	$E\{X\} = \mu$
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\xi-\mu)^2}{\sigma^2}} d\xi$	$Var\{X\} = \sigma^2$

- **Lognormalverteilung**

  Bei einer lognormalverteilten Zufallsvariablen X ist der Logarithmus naturalis der Zufallsvariablen normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2.

  Anwendungsbeispiel: Modellierung der Fadingeinflüsse (slow fading) von Mobilfunkkanälen

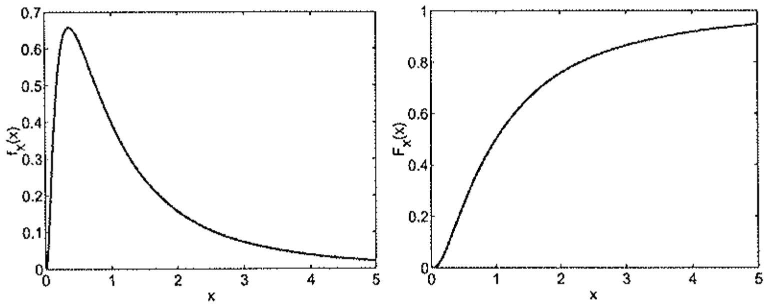


Abbildung 2.13: Logormalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$)

Lognormalverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \qquad E\{X\} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0; \\ \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\xi} e^{-\frac{(\ln \xi - \mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \qquad Var\{X\} = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

- **Rayleigh-Verteilung**

  Die Rayleigh-Verteilung entsteht aus einer komplexen Zufallsvariablen, deren Real- und Imaginärteil jeweils normalverteilt sind. Dann ist deren Phase gleichverteilt, während der Betrag rayleighverteilt ist.

  Anwendungsbeispiel: Modellierung der Fadingeinflüsse (fast fading) von Mobilfunkkanälen (Betrag komplex normalverteilter Zufallsvariablen)

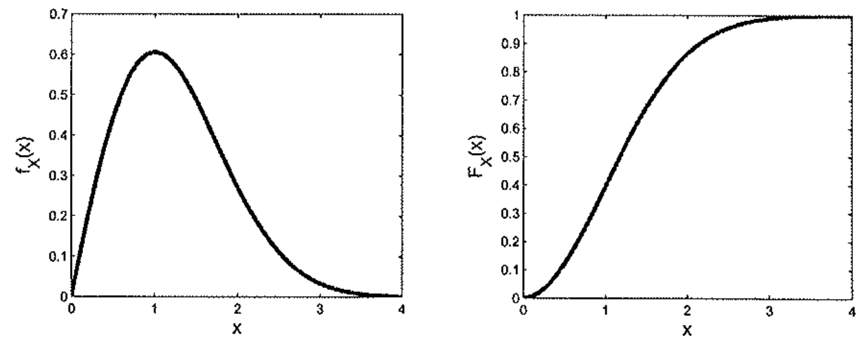


Abbildung 2.14: Rayleigh-Verteilung

Rayleigh-Verteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} x < 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad E\{X\} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad Var\{X\} = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

- **Exponentialverteilung**

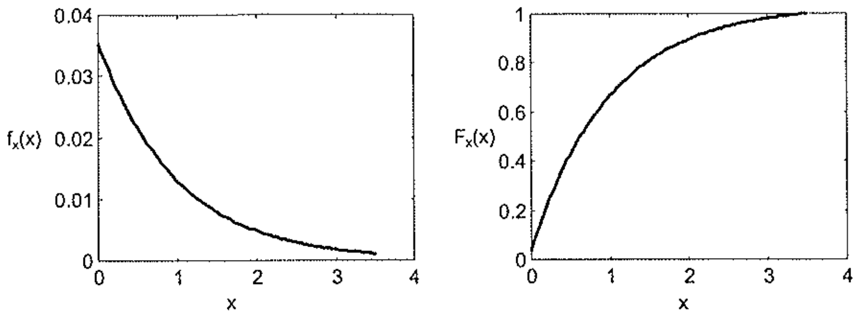


Abbildung 2.15: Exponentialverteilung

Anwendungsbeispiel: Beschreibung der Dauer von Vorgängen (Telefongespräche, Bedienzeiten eines Rechners,...), Geburt- und Sterbeprozesse

Exponentialverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{für } x > 0, \alpha > 0 \end{cases} \qquad E\{X\} = \frac{1}{\alpha}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{für } x > 0, \alpha > 0 \end{cases} \qquad Var\{X\} = \frac{1}{\alpha^2}$$