

Kapitel 3. Beschreibung und Analyse von Zufallsvariablen

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen beschreibt das Zufallsexperiment vollständig. In diesem Abschnitt beschreiben wir weitere charakteristische Größen einer Zufallsvariablen, mit denen ein schneller Überblick über das zufällige Verhalten der Zufallsvariablen gewonnen werden soll.

Erwartungswert für diskrete Zufallsvariable

Definition 3.2 (Erwartungswert für diskrete Zufallsvariable) Nimmt die Zufallsvariable X im Ereignisraum Ω_X ausschließlich diskrete Werte x_i mit $i = 1, \dots, N$ an und ist $p_i = P_X(X = x_i)$ die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte, dann ist der Erwartungswert $E\{X\}$ dieser Zufallsvariablen X wie folgt definiert:

Erwartungswert

$E\{X\}$

$$E\{X\} := \sum_{i=1}^N x_i \cdot p_i. \quad (3.4)$$

○

Der Erwartungswert beschreibt eine Größe, die bei dem Zufallsexperiment im Mittel angenommen wird. Der Erwartungswert selbst muss bei einer diskreten Zufallsvariablen allerdings kein Element des Ereignisraumes Ω_X sein.

Erwartungswert für kontinuierliche Zufallsvariable

Definition 3.3 (Erwartungswert für kontinuierliche Zufallsvariable) Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$, so bezeichnet $E(X)$ mit

$$E\{X\} := \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot f_X(\xi) d\xi \quad (3.5)$$

den Erwartungswert der Zufallsvariablen X .

○

Dabei ist noch eine kleine mathematische Bedingung zu berücksichtigen. Diese Definition des Erwartungswertes gilt nur dann, falls das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| f_X(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

im Riemannschen Sinne existiert.

Beispiele für Erwartungswerte

- **Alternativverteilung:** Die Zufallsvariable X nimmt in diesem Fall lediglich die Werte 0 mit einer Wahrscheinlichkeit von $p(0) = 1 - p$ und 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von $p(1) = p$ an. Der Erwartungswert dieser Zufallsvariablen X ist dann:

$$E\{X\} = \sum_{x=0}^1 x \cdot p(x) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

- **Binomialverteilung:** Das obige binäre Experiment wird n -fach wiederholt und die zufällig geworfenen Werte 0 und 1 in einem Vektor der Länge n angeordnet. Die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit P_k genau k 1en zufällig in diesem Vektor der Länge n geworfen werden, wurde bereits durch die Binomialverteilung beantwortet.

$$P_k = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}$$

Daraus berechnet sich der Erwartungswert dieser binomialverteilten Zufallsvariablen wie folgt:

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^n k \cdot P_k = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)} = n \cdot p$$

Dieses Ergebnis der Erwartungswertberechnung kann alternativ auch durch eine n -fach wiederholte Versuchsanordnung der Alternativverteilung gedeutet werden. Durch Summation der Zufallsvariablen (Anzahl der 1en im Vektor der Länge n) wächst der Erwartungswert um den Faktor n .

- **Normalverteilung:** Der Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen wird mit Hilfe einer Variablentransformation berechnet: Mit $t := (s - \mu)/\sigma$ eingesetzt in das ursprüngliche Integral erhält man

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} s \exp\left(-\frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t\sigma + \mu) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \mu, \end{aligned}$$

Die Funktion $t \exp(-t^2/2)$ ist eine über der reellen Achse ungerade Funktion, dementsprechend verschwindet der Integralwert. Ferner kann der Wert des verbleibenden Integrals im Bronstein nachgelesen werden. Damit gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \exp(-t^2/2) dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2) dt = \sqrt{2\pi}$$

Der Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen ist also: $E\{X\} = \mu$. Diese Eigenschaft wurde bereits bei der Definition und Beschreibung der Normalverteilung und der Bedeutung des Parameters μ erwähnt.

Rechenregeln für Erwartungswerte

Seien X, Y zwei Zufallsvariable und a, b zwei konstante reelle Faktoren, dann gilt für die Erwartungswertberechn. dieser zusammengesetzten Zufallsvariablen:

$$E\{a\} = a \quad (3.7)$$

$$E\{aX + b\} = aE\{X\} + b \quad (3.8)$$

$$E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\} \quad (3.9)$$

Der Erwartungswert ist also ein linearer Operator, d.h. der Erwartungswert angewandt auf eine Summe von Zufallsvariablen ist gleich der Summe der einzelnen Erwartungswerte.

Für statistisch unabhängige Zufallsvariable X, Y (siehe Kapitel 3.6) gilt außerdem eine sehr wichtige Beziehung, die hier bereits vorab genannt werden soll:

$$E\{X \cdot Y\} = E\{X\} \cdot E\{Y\} \quad (3.10)$$

Erwartungswerte für Funktionen von Zufallsvariablen

Die Regeln zur Berechnung der Erwartungswerte können zusätzlich sehr nützlich erweitert werden, wenn nicht nur Linearkombinationen, sondern beliebige Funktionen auf die betrachteten Zufallsvariablen angewandt werden. Dazu betrachten wir eine Zufallsvariable X , auf die eine beliebige Funktion $\Psi(X)$ angewandt wird. Ferner gehen wir davon aus, dass es sich bei $\Psi(\cdot)$ um eine messbare Funktion handelt. Dann ist $\Psi(X)$ wiederum eine Zufallsvariable.

Der Erwartungswert von $\Psi(X)$ wird dann folgendermaßen berechnet:

- Ist X eine diskrete Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ für $x \in \Omega_X$, so ist der Erwartungswert

$$E\{\Psi(X)\} := \sum_{i=1}^N \Psi(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^N P[X = x_i] \cdot \Psi(x_i). \quad (3.11)$$

- Ist X dagegen eine kontinuierliche Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ für $x \in \Omega_X$, so ist der Erwartungswert

$$E\{\Psi(X)\} := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \cdot f_X(\xi) d\xi. \quad (3.12)$$

Beispiel 3.1 (Quadrieren einer Zufallsvariablen)

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt im Intervall $[0, 3]$. Sie hat somit die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zufallsvariable X hat den Erwartungswert $E\{X\} = 1.5$. Auf diese gleichverteilte Zufallsvariable X wird die folgende Funktion angewandt:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$$

Der Erwartungswert von $\Psi(X)$ errechnet sich somit als

$$E\{\Psi(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \cdot f_X(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = \frac{3}{2}$$

Momente

Neben dem Erwartungswert lassen sich noch weitere Parameter einer Zufallsvariablen bestimmen, die zusammengefasst als *Momente* bezeichnet werden. Wie man später noch sehen wird, kann man eine Zufallsvariable X ganz ohne Kenntnis der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ alternativ auch allein durch ihre Momente beschreiben. Dies wird mathematisch über die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen erreicht und ist für praktische Anwendungen nicht sonderlich gut geeignet.

Definition der Momente

Momente Ist X eine eindimensionale Zufallsvariable, so heißt im Falle der Existenz der betreffenden Summen bzw. Integrale

$$m_n = E\{X^n\} \quad \text{das } n\text{-te Moment der Zufallsvariablen } X$$

$$z_n = E\{(X - E\{X\})^n\} \quad \text{das } n\text{-te zentrale Moment von } X$$

Die **Momente** dienen zur Beschreibung des Streuverhaltens und der Details im zufälligen Verhalten einer Zufallsvariablen.

Varianz

Varianz Aus der Sicht der Momente einer Zufallsvariablen X ist der Erwartungswert das erste Moment. Neben dem Erwartungswert ist die **Varianz** das wichtigste Moment zur Beschreibung und Charakterisierung einer Zufallsvariablen X . Die Varianz ist das zweite zentrale Moment z_2 einer Zufallsvariablen:

$$\sigma^2 = \text{Var}\{X\}$$

$$\boxed{\text{Var}\{X\} = E\{(X - E\{X\})^2\} = z_2 = \sigma^2} \quad (3.13)$$

Standardabweichung Die aus der Varianz abgeleitete Größe

σ

$$\sigma := \sqrt{\text{Var}\{X\}} \quad (3.14)$$

wird als **Standardabweichung** der Zufallsvariablen X bezeichnet. Dieser Parameter beschreibt anschaulich die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bzw. das Streuverhalten der Zufallsvariablen.

Per Definition ist die Varianz das zweite zentrale Moment. Bei der praktischen Berechnung der Varianz wird häufig vom *Verschiebungssatz* Gebrauch gemacht, nach dem die Varianz alternativ aus dem zweiten (nicht zentralen) Moment und dem Quadrat des Erwartungswertes EX mit der folgenden mathematischen Herleitung berechnet werden kann:

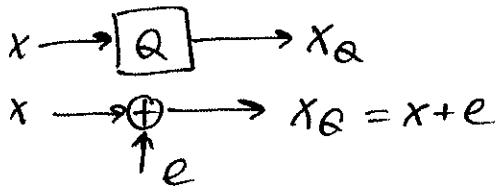
$$\begin{aligned} \text{Var}\{X\} &= E\{X^2 - 2XE\{X\} + E\{X\}^2\} \\ &= E\{X^2\} - 2E\{X\}^2 + E\{X\}^2 \\ &= E\{X^2\} - E\{X\}^2 \end{aligned}$$

Bei der Varianz handelt es sich, im Gegensatz zum Erwartungswert, um *keinen linearen Operator*. Es gilt für die Zufallsvariable X und die Konstanten a, b aber die folgende Beziehung:

$$\text{Var}\{aX + b\} = a^2 \text{Var}\{X\} \quad (3.15)$$

Obwohl die Varianz laut Gleichung (3.15) kein linearer Operator ist, lässt sich die Varianz in dem Sonderfall einer Summe *statistisch unabhängiger Zufallsvariablen* als Summe der Einzelvarianzen berechnen:

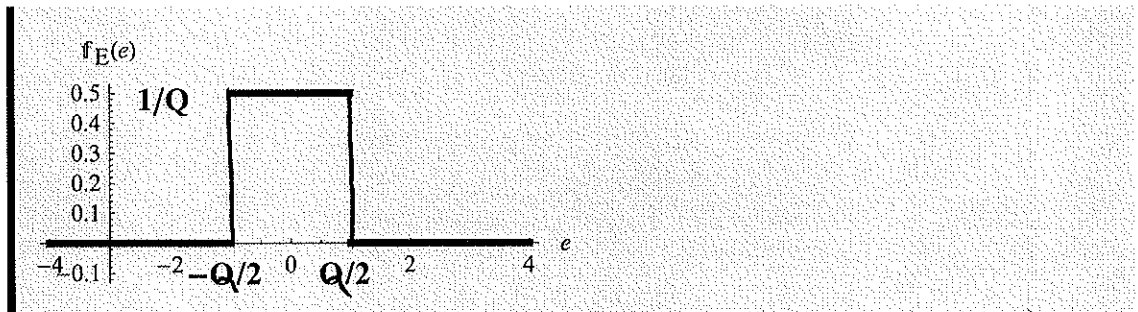
$$\text{Var}\{X_1 + X_2 + \dots + X_N\} = \sum_{i=1}^N \text{Var}\{X_i\} \quad (3.16)$$



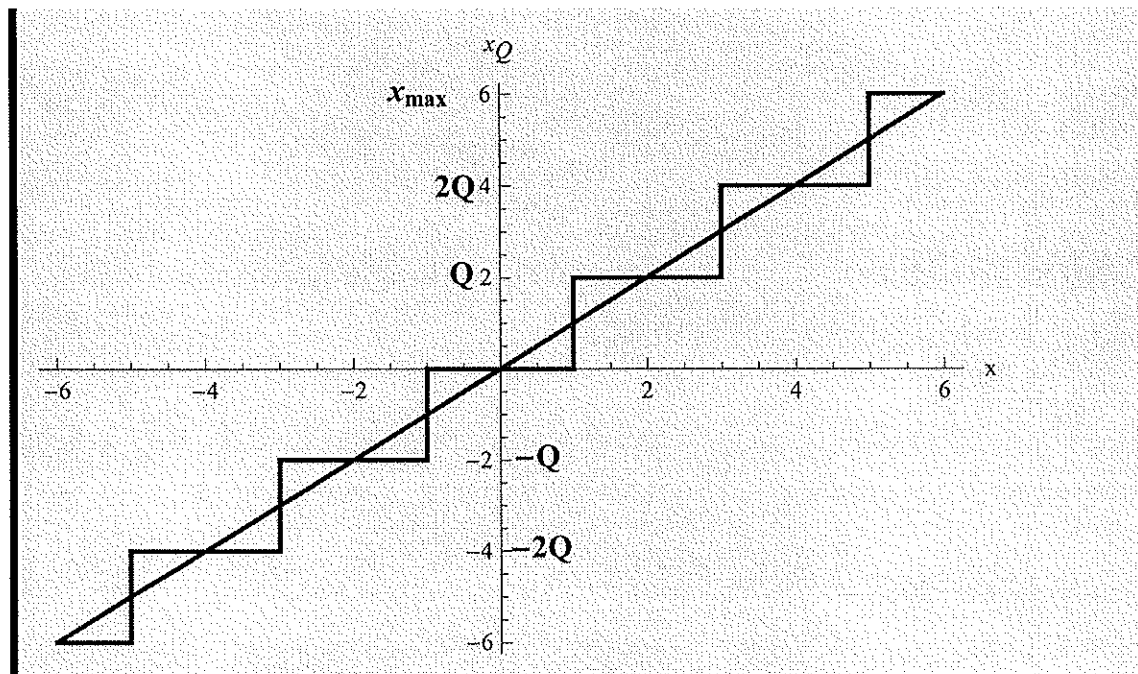
Analogs/Digital-Wandler.

0.0.1 Beispiel (Quantisierer): Die Abtastung zeitkontinuierlicher Signale und die Quantisierung wertkontinuierlicher Signale findet praktisch in jedem A/D-Wandler statt. Der Vorgang der Quantisierung kann durch die *Addition einer gleichverteilten Zufallsvariablen* modelliert werden. Bei der Quantisierung wird zu der wahren wertkontinuierlichen Größe x ein Quantisierungsfehler in Form einer Zufallsvariablen e addiert, um dadurch eine wertdiskrete Größe x_Q zu erhalten.

Lösung: Die Breite eines Quantisierungsfaches sei Q . Dann kann die Wahrscheinlichkeitsdichte des resultierenden Fehlers e durch eine im Intervall $[-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}]$ gleichverteilte Zufallsvariable E angegeben werden



$$f_E[e] = \begin{cases} 1/Q & \text{für } e \in [-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Q ist die Breite einer *Quantisierungsstufe* und ergibt sich aus der maximalen Aussteuerung $\pm x_{\max}$ und der Anzahl der mit ω Bit darstellbaren Stufen,

$$Q = \frac{2x_{\max}}{2^\omega}$$

Mit dieser Annahme ist der Erwartungswert *des Fehlers E*

$$E[E] = 0,$$

d.h., im Mittel wird durch die Quantisierung das Signal nicht verfälscht. An dieser Stelle ist aber für praktische Anwendungen der durch die Quantisierung resultierende quadratische Fehler von Interesse, der im statistischen Sinn direkt durch die Varianz des Quantisierungsrauschens quantitativ ausgedrückt werden kann. Dabei wird die

Gleichverteilung des resultierenden Fehlers im Intervall $\left[-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right]$ berücksichtigt. Mit diesen Voraussetzungen und mit diesen Annahmen berechnet sich die Varianz σ_E^2 des Quantisierungsfehlers wie folgt (aus Satz 16.1.4):

$$\sigma_E^2 = \mathbb{E}[E^2] - \mathbb{E}[E]^2 = \mathbb{E}[E^2] = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_E[u] du = \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} u^2 \frac{1}{Q} du = \frac{Q^2}{12}$$

Mit dieser Berechnung und diesem wichtigen Ergebnis ist gleichzeitig die Varianz für jede gleichverteilte Zufallsvariable mit einer Fachbreite von Q angegeben. Für viele nachrichtentechnische Anwendungen wird der Quantisierungsfehler als ein Rauschsignal aufgefasst und aus dem Quantisierungsrauschen der Signal-zu-Rauschabstand (Signal-Rausch-Verhältnis, SNR) in logarithmischem Maßstab angegeben:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_E^2} \right) \text{ in [dB]}$$

Wenn mit den wertkontinuierlichen Größen x beispielsweise ein Sinussignal

$$x = \sin(\omega t) \text{ und } x_{\max} = 1$$

beschrieben wird, dann erhält man

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[\sin^2(\omega T)] - \mathbb{E}[\sin(\omega T)]^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega u) \frac{2\pi}{w} du - \left(\int_0^{2\pi} \sin(\omega u) \frac{2\pi}{w} du \right)^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Mit der obigen Analyse haben wir dann den folgenden Signal-zu-Rauschabstand:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{1/2}{Q^2/12} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{6}{Q^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{6}{(2^{2\omega})^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{6 \times 2^{-2}}{2^{-2\omega}} \right) = 6.02 \omega + 1.76 \text{ dB}$$

$$10 \cdot (\text{Log}[10, 3/2] + 2 \cdot \omega \cdot \text{Log}[10, 2]) // N$$

$$10 \cdot (0.176091 + 0.60206 \omega)$$

Praktisch besagt diese Analyse, dass mit jedem zusätzlich bei der Quantisierung eingesetzten Bit das SNR um 6dB vergrößert werden kann. Die durch den Quantisierungsvorgang verursachten Fehler verringern sich also mit jedem weiteren im A/D-Wandler eingesetzten Bit.

Zufallsvektoren

In vielen praktischen Anwendungsfällen werden Zufallsexperimente beobachtet, in denen nicht nur wie bisher betrachtet eine einzelne Zufallsvariable, sondern gleichzeitig mehrere Zufallsvariable auftreten. In dieser Situation werden die einzelnen Zufallsvariablen dann mathematisch formal und sinnvollerweise in einen Vektor zusammengefasst.

Zufallsvektor **Definition 3.4 (Zufallsvektor)** Betrachtet man mehrere Zufallsvariable X_1, \dots, X_n auf dem selben Ereignisraum Ω , so definiert die Abbildung

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n \quad (3.17)$$

einen Zufallsvektor X . ○

Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen (Vektoren)

- Für das gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmaß, bzw. das Verbund-Wahrscheinlichkeitsmaß P_X dieses Zufallsvektors wird die **gemeinsame Verteilungsfunktion** bzw. Verbund-Verteilungsfunktion wie folgt hergeleitet:

$$F_X(t) : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1], \quad F_X(t) := P_X \left(\bigcap_{j=1}^n [X_j \leq t_j] \right) \quad (3.18)$$

Für einen Zufallsvektor, in dem lediglich zwei Zufallsvariable X_1 und X_2 auftreten, ist die bei der Definition der gemeinsamen bzw. Verbund-Verteilungsfunktion betrachtete Situation in Bild 3.4 dargestellt, in dem die schraffierte Fläche als ein Element der zweidimensionalen Borel-Menge aufgefasst wird. Diese dort dargestellte zweidimensionale Situation kann abstrakt auf mehrere Dimensionen leicht erweitert werden.

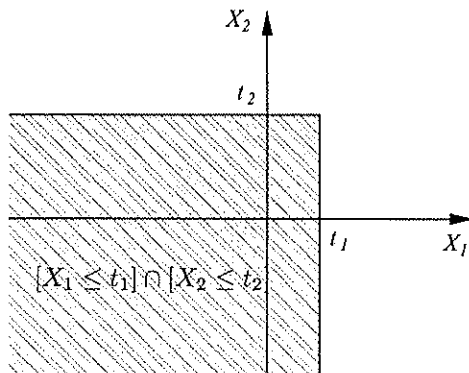


Abbildung 3.4:

- Die Eigenschaften der gemeinsamen bzw. Verbund-Verteilungsfunktion sind selbstverständlich direkt vergleichbar mit der Verteilungsfunktion einer einzelnen eindimensionalen Zufallsvariablen X :

- $0 \leq F_X(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$
- $F_X(t) \leq F_X(s)$, falls $t_j \leq s_j, j = 1, \dots, n$
- F_X ist rechtsseitig stetig, d.h. $\lim_{t_j \rightarrow t_j + 0} F_X(t) = F_X(t)$

- Für einen Zufallsvektor mit kontinuierlichen Werten kann die Verbund-Verteilungsfunktion direkt aus der **gemeinsamen bzw. Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte** $f_X(s)$ per Mehrfachintegral berechnet werden:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} f_X(s_1, s_2, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1 \quad (3.19)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zufallsvektor Werte innerhalb einer n -dimensionalen Borel-Menge annimmt, berechnet sich aus dem gemeinsamen bzw. Verbund-Wahrscheinlichkeitsmaß P_X wie folgt:

$$P_X(B) = P_X(\{X \in B\}) = \int_B f_X(s) ds_1 \dots ds_n. \quad (3.20)$$

- Für einen diskreten Zufallsvektor X erhält man entsprechend

$$P_X(B) = P_X(\{X \in B\}) = \sum_{t \in B} f_X(t). \quad (3.21)$$

Randverteilung

Bei der Analyse eines Zufallsvektors interessiert man sich häufig auch für das zufällige Verhalten einer einzelnen Zufallsvariablen, die wiederum durch die Verteilungsfunktion mathematisch beschrieben wird. Im Falle des Zufallsvektors sprechen wir von einer Randverteilung, sozusagen als Projektion eines mehrdimensionalen Raumes auf eine einzige Dimension. Formal wird die Randverteilung durch Integration über die Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet. Die **Randverteilung** für die Zufallsvariable X_i , bzw. die zugehörige Verteilungsfunktion $F_{X_i}(t_i)$ wird mit diesen Erläuterungen nach der folgenden Gleichung berechnet:

$$F_{X_i}(t_i) = \int_{-\infty}^{t_i} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, s_2, \dots, s_n) ds_n \dots ds_{i+1} ds_{i-1} \dots ds_1 ds_i \quad (3.22)$$

Die **Rand-Wahrscheinlichkeitsdichte** der Zufallsvariablen X_i (i -te Komponente eines Zufallsvektors) wird für kontinuierliche und diskrete Zufallsvariablen X_i wie folgt berechnet:

Kontinuierliche Zufallsvektoren:

$$f_{X_i}(s_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) ds_1, \dots, ds_{i-1}, ds_{i+1}, \dots, ds_n \quad (3.23)$$

Die Rand-Wahrscheinlichkeitsdichte ist gleichzeitig die Ableitung der Randverteilung.

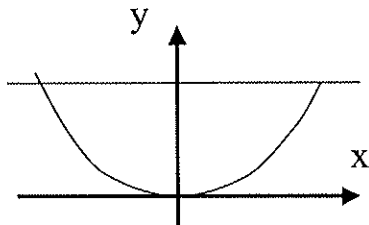
Diskrete Zufallsvektoren:

$$f_{X_i}(t_i) = \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{t_{i-1}=-\infty}^{\infty} \sum_{t_{i+1}=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{t_n=-\infty}^{\infty} f_X(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n) \quad (3.24)$$

7.3 Aufgabe

Sei $f_{XY}(x, y) = c y$, für $(x, y) \in D$, 0 für $(x, y) \notin D$, wobei D von der Kurve $y=x^2$ und der Gerade $y=1$ beschränkt wird, die gemeinsame Verteilungsdichte zweier stetiger Zufallsvariablen X und Y . Bestimmen Sie die Konstante c , die bedingte Verteilungsdichte von X unter der Bedingung $\{Y=y\}$ und die bedingte Verteilungsdichte von Y unter der Bedingung $\{X=x\}$. Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

Lösung:



i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 c y dx dy = c \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{4}$$

ii)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_{x^2}^1 c y dy = \frac{c}{2} [1 - x^4]$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} c y dx = 2 c y \sqrt{y}$$

iii)

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 1 / (2 \sqrt{y}) & \text{für } x \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}], y \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 2 y / (1 - x^4) & \text{für } y \in [x^2, 1], x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

iv) Die Zufallsvariablen X und Y sind abhängig

$$f_{XY}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y) \text{ und auch}$$

$$f_{X|Y=y}(x) \neq f_X(x) \text{ und } f_{Y|X=x}(y) \neq f_Y(y)$$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

unabhängige Zufallsvariablen

Die zunächst beliebigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen **unabhängig**, wenn für alle Borelschen Mengen $B_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, und das zugehörige gemeinsame bzw. Verbund-Wahrscheinlichkeitsmaß P_X gilt:

$$P_X(\{X_j \in B_j, j = 1, \dots, n\}) = \prod_{j=1}^n P_{X_j}(\{X_j \in B_j\}). \quad (3.25)$$

Im Falle der unabhängigen Zufallsvariablen kann das gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmaß P_X direkt aus dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsmaße für die Zufallsvariablen X_j berechnet werden.

Bei zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 stellt sich der Sachverhalt der Unabhängigkeit mathematisch etwas einfacher wie folgt dar:

$$P_X(\{X_1 \in B_1\}, \{X_2 \in B_2\}) = P_{X_1}(\{X_1 \in B_1\}) \cdot P_{X_2}(\{X_2 \in B_2\}).$$

Die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen kann alternativ auch mit Hilfe der Verbund-Verteilungsfunktion beschrieben werden. In diesem Fall wird die Verbund-Verteilungsfunktion aus dem Produkt der Randverteilungen für die einzelnen Zufallsvariablen X_j berechnet.

$$F_X(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(t_j) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n \quad (3.26)$$

Dieses Konzept der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen kann alternativ auch durch die Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte definiert werden.

$$f_X(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(t_j) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n \quad (3.27)$$

Beispiel 3.3 (RAYLEIGH-Verteilung)

Dieses wichtige Konzept der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen soll an Hand eines zunächst einfachen Beispiels anschaulich erläutert werden. Dazu betrachten wir zwei unabhängige Zufallsvariable X und Y . Diese beiden Zufallsvariablen seien statistisch unabhängig und gehorchen jeweils einer Gauß'schen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Auf Grund der statistischen Unabhängigkeit wird die Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte direkt aus dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen wie folgt berechnet:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Anschaulich können die beiden unabhängigen Zufallsvariablen X und Y als der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zufallsvariablen in einem kartesischen Koordinatensystem angesehen werden. Dementsprechend lassen sich aus den beiden Zufallsvariablen X und Y alternativ auch der Betrag r und die Phase ϕ in einem Polarkoordinatensystem eindeutig darstellen und berechnen.

$$X = r \cdot \cos(\phi)$$
$$Y = r \cdot \sin(\phi) \quad \text{mit } \phi \in [0, 2\pi); \quad r \geq 0$$

und

$$r^2 = X^2 + Y^2.$$

Die Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte für den Betrag r und die Phase ϕ kann durch die obige Koordinatentransformation unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante wie folgt bestimmt werden:

$$f_{(r,\phi)} = \left| J \begin{pmatrix} X & Y \\ r & \phi \end{pmatrix} \right| \cdot f_{(X,Y)}(X = r \cos(\phi), Y = r \sin(\phi))$$

mit dem Betrag der Jacobi-Determinante

$$\begin{aligned} \left| J \begin{pmatrix} X & Y \\ r & \phi \end{pmatrix} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \phi} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix} \right| \\ &= r \cdot (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) = r \end{aligned}$$

folgt

$$f(r, \phi)(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

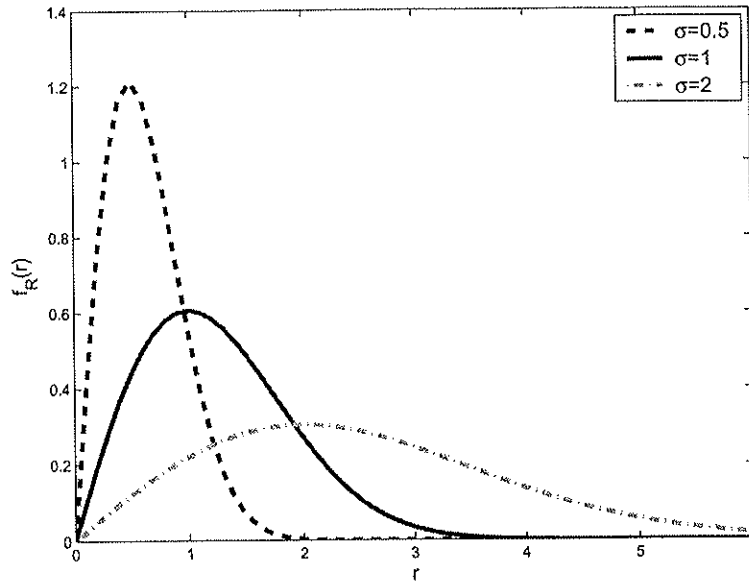


Abbildung 3.5: Rayleigh-Verteilung

Mit diesen Vorbereitungen kann die Rand-Wahrscheinlichkeitsdichte für den Betrag r per Integration über ϕ wie folgt ermittelt werden:

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f(r, \phi)(r, \phi) d\phi = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (3.28)$$

Dies entspricht der schon aus Abschnitt 2.6.2 bekannten Rayleigh-Verteilung.

In Abbildung 3.5 sind einige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Rayleigh-Verteilung für einige Parameter σ grafisch dargestellt. \triangle

Erwartungswerte von statistisch unabhängigen Zufallsvariablen.

Bei der praktischen Berechnung der Erwartungswerte von Zufallsvariablen wurde bereits die Bedeutung der Linearität bei der Erwartungswertbildung angesprochen. Danach ist der Erwartungswert einer Summe unterschiedlicher Zufallsvariablen gleich der Summe der einzelnen Erwartungswerte:

- Linearität:

$$E\left\{\sum_i c_i X_i\right\} = \sum_i c_i E\{X_i\} \quad (3.29)$$

- Für das Produkt statistisch unabhängiger Zufallsvariablen gilt insbesondere die folgende wichtige Beziehung:

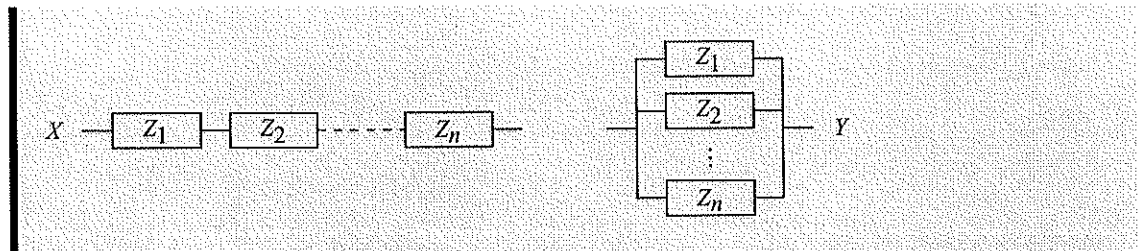
$$E\left\{\prod_i \Psi_i(X_i)\right\} = \prod_i E\{\Psi_i(X_i)\} \quad (3.30)$$

Danach ist der Erwartungswert eines Produktes verschiedener Zufallsvariablen gleich dem Produkt der einzelnen Erwartungswerte.

0.0.1 Beispiel: Wir betrachten zwei elektronische Geräte: Das eine besteht in der **Serienschaltung**, das andere in der **Parallelschaltung** von jeweils n gleichartigen Komponenten. Unter der Annahme, dass die einzelnen Komponenten vollständig unabhängig voneinander ausfallen und ihre Lebensdauern mit dem Parameter λ exponentialverteilt sind (wir werden später sehen, dass diese Annahme für die Verteilung der Lebensdauer von elektronischen Bauteilen gerechtfertigt ist), bestimme man die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Lebensdauer dieser beiden Geräte.

▼

Lösung: Es bezeichne X die Lebensdauer der Serienschaltung, Y die Lebensdauer der Parallelschaltung und Z_i die Lebensdauer der i -ten Komponente.



a) Aus der Angabe entnimmt man, dass die Zufallsvariablen Z_1, Z_2, \dots, Z_n vollständig unabhängig und mit dem Parameter λ exponentialverteilt sind. Beachtet man, dass die Serienschaltung bereits dann ausfällt, wenn eine einzige Komponente ausfällt, so ergibt sich für die Verteilungsfunktion $F_X[x]$ der Lebensdauer X der Serienschaltung unter Verwendung der Siebformel von Sylvester

$$\begin{aligned}
 F_X[x] &= \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{\text{Min}[Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \leq x\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n \{Z_i \leq x\}\right\} = \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}\{Z_i \leq x\}) = 1 - e^{-n\lambda x}
 \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable X ist damit offenbar $\mathcal{E}[n\lambda]$ verteilt.

b) Beachtet man dass die Parallelschaltung erst dann ausfällt, wenn die letzte Komponente ausfällt, so ergibt sich für die Verteilungsfunktion $F_Y[y]$ der Lebensdauer Y der Parallelschaltung (man beachte, dass es sich bei der Verteilung der Zufallsvariablen Y um keine der in *Mathematica* implementierten Verteilungen handelt)

$$\begin{aligned}
 F_Y[y] &= \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{\text{Max}[Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \leq y\} = \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq y\}\right] = \\
 &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{Z_i \leq y\} = (1 - e^{-\lambda y})^n
 \end{aligned}$$

c) Die Berechnung des Erwartungswerts $\mathbb{E}[X]$ der Serienschaltung ist einfach; man muss dazu lediglich den Erwartungswert einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $n\lambda$ ermitteln:

```

Mean[ExponentialDistribution[n λ]]

1
--
n λ

```

Die Berechnung des Erwartungswerts $\mathbb{E}[Y]$ der Parallelschaltung läuft auf die Berechnung des Integrals

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{\infty} y f_Y[y] dy$$

hinaus. Wir führen die Berechnung dieses Integrals unter Verwendung von *Mathematica* durch

```
Integrate[D[(1 - Exp[-λ y])n, y], {y, 0, ∞}, Assumptions -> {n > 0, λ > 0}]
```

```
HarmonicNumber[n]
```

```
λ
```

und erhalten damit

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda} \text{HarmonicNumber}[n] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

Kovarianz

Das Konzept der statistischen Unabhängigkeit zwischen unterschiedlichen Zufallsvariablen steht anschaulich für Zufallsexperimente, die völlig unabhängig voneinander betrieben werden. Dieser Fall liegt in der praktischen Anwendung sehr häufig vor, z.B. beim wiederholten Werfen von Münzen oder Würfeln. Trotzdem handelt es sich beim Konzept der statistischen Unabhängigkeit um einen Sonderfall. Dieses Konzept wird deshalb ergänzt durch ein weiteres Konzept, in dem Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen zunächst anschaulich vorkommen und dieser Fall mathematisch formal durch den Begriff der Kovarianz beschrieben wird.

Kovarianz

σ_{ij}

Zur quantitativen Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen wird die Kovarianz definiert. Für zwei Zufallsvariable X und Y wird die **Kovarianz** σ_{XY} oder $Cov\{X, Y\}$ im Wesentlichen durch den Erwartungswert des Produktes dieser beiden Zufallsvariablen beschrieben:

$$\sigma_{XY} = Cov\{X, Y\} := E\{[X - E\{X\}][Y - E\{Y\}]\}. \quad (3.31)$$

Durch Multiplikation der einzelnen Faktoren und Bildung des Erwartungswertes kann die Kovarianz alternativ durch die Differenz zwischen dem Erwartungswert des Produktes und dem Produkt der Erwartungswerte mit Hilfe des *Verschiebungssatzes* wie folgt berechnet werden:

$$Cov\{X, Y\} = E\{X \cdot Y\} - E\{X\} \cdot E\{Y\}. \quad (3.32)$$

Diese allgemeine Definition der Kovarianz, mit der die Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen formal erfasst werden kann, beinhaltet auch das Konzept der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen. Falls X und Y nämlich unabhängig voneinander sind, dann ist der Erwartungswert des Produktes dieser beiden Zufallsvariablen gleich dem Produkt der Erwartungswerte, es gilt also $E\{X \cdot Y\} = E\{X\} \cdot E\{Y\}$.

Dementsprechend folgt für die Kovarianz zweier unabhängiger Zufallsvariablen X und Y , dass die Kovarianz verschwindet: $Cov\{X, Y\} = 0$. Allerdings ist diese Aussage im Allgemeinen nicht umkehrbar, d.h., aus der Eigenschaft einer verschwindenden Kovarianz folgt nicht immer die statistische Unabhängigkeit der Zufallsvariablen.

$$\begin{array}{l} \text{statistische Unabhängigkeit} \\ \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{array} Cov\{X, Y\} = 0$$

Beispiel

$Y \setminus X$	-1	0	1	$f_Y(y)$
0	1/3	0	1/3	2/3
1	0	1/3	0	1/3
$f_X(x)$	1/3	1/3	1/3	1

$$E\{X \cdot Y\} = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot P\{X=x, Y=y\} = 0 = E\{X\} \cdot E\{Y\}$$

z.V. X und Y sind unkorreliert, aber nicht unabhängig, denn

$$P\{X=1, Y=1\} = 0 \neq \frac{1}{9} = P\{X=1\} \cdot P\{Y=1\}$$

Das Konzept der Kovarianz kann auf mehrere Zufallsvariable, bzw. auf einen Zufallsvektor entsprechend erweitert werden. Für einen Zufallsvektor X berechnet sich die Kovarianz zwischen den einzelnen Komponenten entsprechend:

$$\sigma_{ij} = Cov\{X_i, X_j\} := E\{(X_i - E\{X_i\})(X_j - E\{X_j\})\}.$$

In dieser Definition entsteht bei der Berechnung der Kovarianz formal die Varianz σ_i^2 der Zufallsvariablen X_i , falls die bei der Berechnung der Kovarianz erforderlichen beiden Zufallsvariablen identisch sind:

$$\sigma_{ii} = Var\{X_i\} = \sigma_i^2.$$

Die paarweise berechneten Kovarianzen werden im Fall eines Zufallsvektors X in der Kovarianz-Matrix **(Varianz-)Kovarianz-Matrix** zusammengefasst, die wie folgt definiert ist:

σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{(n-1)1} & \dots & \sigma_{(n-1)}^2 & \sigma_{(n-1)n} \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{n(n-1)} & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Konzeptes der Kovarianz kann die *Varianz einer Summe von Zufallsvariablen* wie folgt bestimmt werden:

$$Var\left\{\sum_{i=1}^n c_i X_i\right\} = \sum_{i=1}^n c_i^2 Var\{X_i\} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_i c_j Cov\{X_i, X_j\} \quad (3.33)$$

Für $n = 2$ und $c_1 = c_2 = 1$ gilt speziell:

$$Var\{X_1 + X_2\} = Var\{X_1\} + Var\{X_2\} + 2Cov\{X_1, X_2\} \quad (3.34)$$

Mehrdimensionale Normalverteilung (Multinormalverteilung)

Ein Zufallsvektor X heißt *normalverteilt* oder $N(\mu, \sigma)$ -verteilt mit den Parametern

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

und der positiv definiten Kovarianzmatrix

$$\sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)},$$

wenn der Zufallsvektor X die folgende Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(s) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sqrt{\det \sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (s - \mu)^T \sigma^{-1} (s - \mu) \right\} \quad (3.35)$$

besitzt.

Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer positiv definiten (Kovarianz-)Matrix σ , falls für alle vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ das folgende Produkt $\vec{x} \sigma \vec{x} > 0$ positive Werte aufweist. Es kann leicht nachgewiesen werden, dass eine Kovarianzmatrix stets die Eigenschaft der positiven Definitheit erfüllt.

Falls der Zufallsvektor X einer $N(\mu, \sigma)$ -Verteilung gehorcht, dann gilt für jede Komponente des Vektors, also auch für die i -te Komponente der Zufallsvariablen X_i , dass die

Randverteilung selber wieder einer Normalverteilung mit $N(\mu_i, \sigma_{ii})$ gehorcht. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen X_i ist dann:

$$f_{X_i}(s_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ii}}} \exp \left\{ -\frac{(s_i - \mu_i)^2}{2\sigma_{ii}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left\{ -\frac{(s_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\}. \quad (3.36)$$

Beispiel 3.4 (Zweidimensionale Normalverteilung)

Falls der Zufallsvektor X nur zwei Komponenten enthält, die statistisch unabhängig und identisch normalverteilt sind, mit dem Erwartungswert Null ($E\{X\} = E\{Y\} = 0$) und gleicher Varianz σ^2 , dann ist die Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f_X(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Diese Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist in Abbildung 3.6 anschaulich dargestellt. \triangle

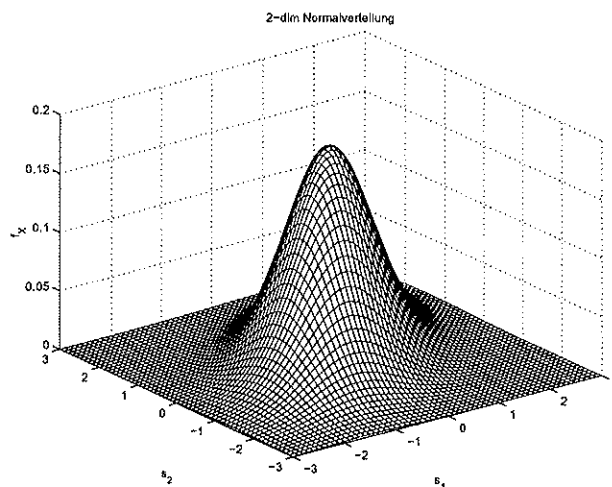


Abbildung 3.6: Zweidimensionale Normalverteilung

Korrelationskoeffizient

Definition 3.5 (Korrelationskoeffizient) Der Korrelationskoeffizient zweier Zufallsvariablen ist definiert durch

$$\rho_{X,Y} := \frac{\text{Cov}\{X,Y\}}{\sqrt{\text{Var}\{X\}}\sqrt{\text{Var}\{Y\}}}. \quad (3.37)$$

Korrelationskoeffizient
 $\rho_{X,Y}$

○

Wären die betrachteten Zufallsvariablen bereits auf eine einheitliche Varianz normiert gewesen ($\text{Var}\{X\} = 1$), dann wären der Wert der Kovarianz und der des Korrelationskoeffizienten identisch.

Die Definition des Korrelationskoeffizienten erfüllt folgende Eigenschaften:

- Für *unabhängige* Zufallsvariable X und Y ist $\rho_{X,Y} = 0$. In diesem Fall werden X und Y als *unkorreliert* bezeichnet.
- Für *linear abhängige* X und Y gilt $\rho_{X,Y} = \pm 1$.
- Für beliebige Zufallsvariable gilt $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

Mit diesen Vorbereitungen und Herleitungen können bereits wichtige Aussagen gemacht werden. Wenn eine Zufallsvariable Y sich aus der Summe mehrerer gewichteter Zufallsvariablen (in einer Linearkombination) zusammensetzt,

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i,$$

dann können bereits der Erwartungswert und die Varianz dieser neuen Zufallsvariablen Y ohne explizite Kenntnis der Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ berechnet werden. Damit liegt eine zunächst grobe Kenntnis des zufälligen Verhaltens dieser neuen Zufallsvariablen Y vor. Was allerdings noch nicht gelingt, ist die präzise Herleitung der Verteilungs- oder der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dieser neuen Zufallsvariablen Y . Für die Berechnung der genauen Verteilungsfunktion müssen einige mathematische Vorbereitungen getroffen werden, die mit der Einführung der *Charakteristischen Funktion* einer Zufallsvariablen beginnen.

Charakteristische Funktion Summe von Zufallsvariablen

In der Praxis entsteht häufig die Aufgabe, das zufällige Verhalten eines Experiments zu analysieren, in dem sich die auftretende Zufallsvariable als Summe von unabhängigen Zufallsereignissen $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ analytisch darstellen lässt. Für solche Aufgaben und für solche Beispiele wurden bereits erste Abschätzungen für das Zufallsverhalten der Variablen Z in Form des berechneten Erwartungswertes und der Varianz angegeben. Die Zielsetzung in diesem Kapitel liegt darin, das Zufallsverhalten der Variablen Z mathematisch genau und vollständig berechnen zu können.

Ausgehend von den beiden unabhängigen Zufallsvariablen X und Y wird nach der Wahrscheinlichkeitsdichte der neuen Zufallsvariablen $Z = X + Y$ gefragt. Weiterhin wird wiederum zunächst vereinfachend angenommen, dass die Zufallsvariablen X und Y diskrete Werte im Ereignisraum Ω_X annehmen. Der Wertebereich bzw. der Ereignisraum wird

jeweils mit N_0
angenommen.

Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P_Z(Z = X + Y = i) = \sum_{j=0}^i P_{X,Y}(X = j, Y = i - j) = \sum_{j=0}^i P_X(X = j) \cdot P_Y(Y = i - j).$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Z(i)$ der Zufallsvariablen $Z = X + Y$ kann also durch folgende Gleichung mathematisch geschlossen angegeben werden:

$$f_Z(i) = \sum_{j=0}^i f_X(j) f_Y(i - j) =: f_X * f_Y(i).$$

Diese Berechnungsvorschrift ist als Faltung bekannt.

Diese erste beispielhafte Analyse kann leicht auf eine endliche Anzahl n additiv überlagerter Zufallsvariablen übertragen werden. In diesem Fall wird die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Z(x)$ durch eine n -fache Faltung berechnet.

$$\begin{aligned} Z &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ \Downarrow \\ f_Z(x) &= f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * \dots * f_{X_n}(x) \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt diese erste Analyse nicht nur für diskrete, sondern auch für kontinuierliche Zufallsvariable.

Die Faltung zweier Funktionen ist eine mathematisch sehr unfreundliche sowie numerisch sehr aufwendige Operation. Aus diesem Grund möchte man auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie dieselbe Vorgehensweise wie in der Systemtheorie wählen, indem man den sogenannten Faltungssatz anwendet. Dabei wird der Zusammenhang zwischen dem Zeit- und Frequenzbereich in Form der Fourier-Transformation ausgenutzt.

In diesem Faltungssatz ist folgende mathematische Aussage enthalten: Jeder Funktion (und damit auch jeder Wahrscheinlichkeitsdichte) ist durch die Fourier-Transformation $\mathcal{F}\{\dots\}$ in eindeutiger Form ein Spektrum zugeordnet. Das Spektrum einer Funktion $f_Z(x)$, die sich durch Faltung zweier Funktionen $f_X(x)$ und $f_Y(x)$ ergibt, kann dann durch das Produkt der beiden Spektren relativ einfach berechnet werden.

$$\begin{array}{ccccc}
 f_Z(x) & = & f_X(x) & * & f_Y(x) \\
 \circ \downarrow & & \circ \downarrow & & \circ \downarrow \\
 \mathcal{F}\{f_Z(x)\} & = & \mathcal{F}\{f_X(x)\} & \cdot & \mathcal{F}\{f_Y(x)\}
 \end{array}$$

Mit der nachfolgenden Definition der charakteristischen Funktion $\Phi_Z(j\omega)$ kann die im Zeitbereich durchzuführende Faltungsoperation zwischen mehreren Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{X_i}(x)$ ersatzweise rechentechnisch wesentlich einfacher im Frequenzbereich durch eine Multiplikation zwischen den zugehörigen charakteristischen Funktionen der einzelnen Zufallsvariablen X_i durchgeführt werden.

$$\Phi_Z(j\omega) = \prod_i \Phi_{X_i}(j\omega) \quad (3.38)$$

Falls zusätzlich die Zufallsvariablen X_i statistisch unabhängig und identisch verteilt sind und damit auch die zugehörigen charakteristischen Funktionen identisch sind, dann vereinfacht sich die obige Multiplikation und das obige Produkt der charakteristischen Funktionen zusätzlich in der folgenden Beziehung:

$$\Phi_Z(j\omega) = [\Phi_X(j\omega)]^n \quad (3.39)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen Z wird schließlich mit Hilfe der Rücktransformation der charakteristischen Funktion $\Phi_Z(j\omega)$ berechnet. Dieser Umweg über die Berechnung der charakteristischen Funktion ist rechentechnisch wesentlich günstiger als die Berechnung des n-fachen Faltungsproduktes.

Zusätzlich können die Momente einer Zufallsvariablen rechentechnisch sehr einfach aus der charakteristischen Funktion hergeleitet werden.

Definition der Charakteristischen Funktionen

charakteristische Funktion Φ_X **Definition 3.6 (Charakteristische Funktion)** Gegeben sei eine Zufallsvariable X und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$. Dann ist die **charakteristische Funktion** Φ_X wie folgt definiert:

$$\Phi_X(j\omega) : \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \\ \Phi_X(j\omega) := E\{e^{j\omega X}\} \end{cases} \quad (3.40)$$

Für die beiden Spezialfälle diskreter und kontinuierlicher Zufallsvariablen kann die charakteristische Funktion wie folgt mathematisch präzisiert werden:

- diskrete Zufallsvariable:

$$\Phi_X(j\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{j\omega x_k} P_X(X = x_k) \quad (3.41)$$

- kontinuierliche Zufallsvariable:

$$\Phi_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx \quad (3.42)$$

Eigenschaften der charakteristischen Funktion

- Die charakteristische Funktion $\Phi_X(j\omega)$ der Zufallsvariablen X ist die konjugiert komplexe Fourier-Transformierte der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$. Mit dem Zusatz * wird die konjugiert komplexe Funktion beschrieben.

$$\Phi_X(j\omega) = \mathcal{F}^*\{f_X(x)\} \quad (3.43)$$

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ ermittelt man aus $\Phi_X(j\omega)$ durch die entsprechende Rücktransformation:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(j\omega) e^{-j\omega x} d\omega. \quad (3.44)$$

- An der Stelle $\omega = 0$ besitzt jede charakteristische Funktion $\Phi_X(j\omega)$ den reellen Wert 1.

$$\Phi_X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (3.45)$$

Beispiel 3.5 (Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2 . Diese Zufallsvariable X besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Zu dieser normalverteilten Zufallsvariablen X soll die charakteristische Funktion nach Gleichung (3.42) berechnet werden. Dabei ist es nützlich und hilfreich, den Wert des folgenden uneigentlichen Integrals zu kennen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Mit dieser Vorbereitung kann die charakteristische Funktion definitionsgemäß wie folgt auf die obige Wahrscheinlichkeitsdichte angewandt werden:

$$\Phi_X(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(j\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - j\sigma^2\omega)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

und schließlich mit dem obigen Integralwert:

$$\Phi_X(j\omega) = \exp\left(j\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right). \quad (3.46)$$

Dieses wichtige Ergebnis zeigt, dass die charakteristische Funktion einer erwartungsfreien ($\mu = 0$) Gaußschen Zufallsvariablen ebenfalls durch eine Gaußsche Glockenfunktion dargestellt werden kann (Abbildung 3.7).

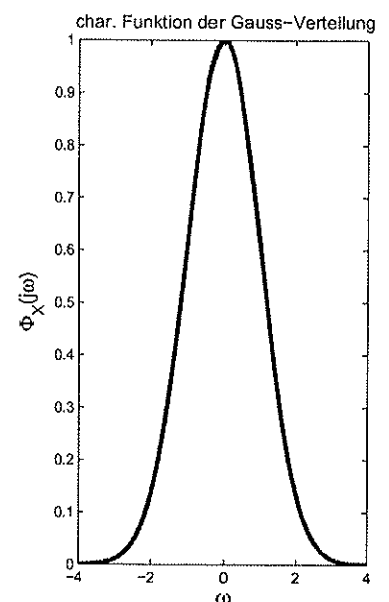
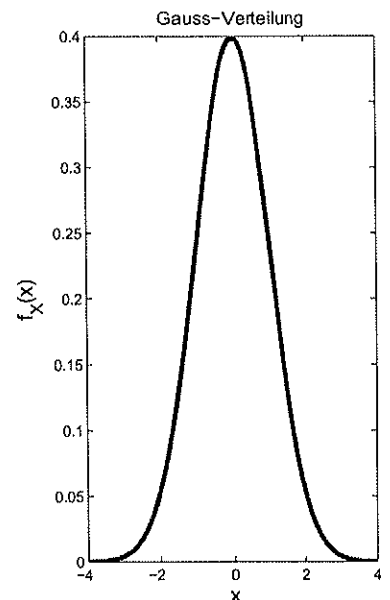


Abbildung 3.7: Gauss-Verteilung mit entsprechender char. Funktion

Beispiel 3.6 (Cauchy-Verteilung)

Die Zufallsvariable X sei Cauchy-verteilt, mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_X(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2}.$$

Man erhält die charakteristische Funktion dieser Zufallsvariablen durch Integration über die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$. Häufig ist die vertraute Anwendung aus dem Bereich der Systemtheorie und der bekannten Fourier-Transformationen etwas einfacher.

Es gilt:

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

Mit Beachtung des Dualitätsprinzips der Fourier-Transformation erhält man somit für die charakteristische Funktion (siehe Abbildung 3.8):

$$\Phi_X(j\omega) = e^{-a|\omega|}. \quad (3.47)$$

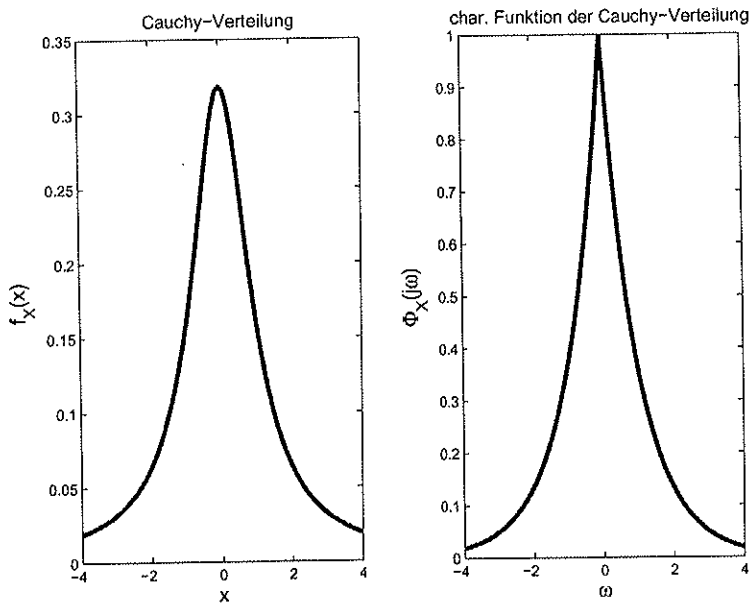


Abbildung 3.8: Cauchy-Verteilung und ihre Charakteristische Funktion

Zusammenhang mit den Momenten einer Zufallsvariablen

Differenziert man die charakteristische Funktion nach ω

$$\frac{d\Phi_X(j\omega)}{d\omega} = j \int_{-\infty}^{\infty} x e^{j\omega x} f_X(x) dx \quad (3.48)$$

und bestimmt den Wert der jeweiligen Ableitung an der Stelle $\omega = 0$, so erhält man

$$\left. \frac{d\Phi_X(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = j \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = jE\{X\}. \quad (3.49)$$

Für höhere Momente der Zufallsvariablen kann folgende allgemeine Berechnungsvorschrift angewandt werden:

$$E\{X^n\} = (-j)^n \left. \frac{d^n \Phi_X(j\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} \quad (3.50)$$

Sämtliche Momente einer Zufallsvariablen X können also auch mit Hilfe der charakteristischen Funktion unmittelbar bestimmt werden. Diese Berechnungsmethode bringt häufig analytische, aber zusätzlich auch rechentechnische Vorteile. Hierzu entwickelt man die charakteristische Funktion $\Phi_X(j\omega)$ in eine Taylorreihe um den Punkt $\omega = 0$

$$\Phi_X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left. \frac{d^n \Phi_X(j\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} \right] \frac{\omega^n}{n!} \quad (3.51)$$

und ersetzt die Ableitungen durch die entsprechenden Erwartungswerte bzw. Momente.

$$\Phi_X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} E\{X^n\} \frac{(j\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{(j\omega)^n}{n!}. \quad (3.52)$$

Beispiel 3.7 (Normalverteilung)

Seien X und Y zwei statistisch unabhängige normalverteilte Zufallsvariable mit $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ bzw. $N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Dann gilt für die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen Z , die sich aus der Summe $Z = X + Y$ berechnet:

$$\Phi_Z(j\omega) = \Phi_X(j\omega) \cdot \Phi_Y(j\omega).$$

Mit der charakteristischen Funktion einer Normalverteilung (3.46)

$$\Phi_X(j\omega) = \exp\left(j\mu_x\omega - \frac{1}{2}\sigma_x^2\omega^2\right)$$

ergibt sich unter Ausnutzung der angenommenen statistischen Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} \Phi_Z(j\omega) &= \exp\left(j\mu_x\omega - \frac{1}{2}\sigma_x^2\omega^2\right) \cdot \exp\left(j\mu_y\omega - \frac{1}{2}\sigma_y^2\omega^2\right) \\ &= \exp\left(j(\mu_x + \mu_y)\omega - \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\omega^2\right) \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable Z ist also wiederum normalverteilt mit $\mu_z = \mu_x + \mu_y$ und $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

Zusammengefasst gilt, dass die Summe aus unabhängigen Gauß' verteilten Zufallsvariablen wiederum eine gaussverteilte Zufallsvariable ergibt. \triangle

Zweidimensionale Charakteristische Funktion

Lediglich der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass das Konzept der charakteristischen Funktion auch auf mehrere Dimensionen ausgedehnt werden kann. Bei entsprechendem Vorgehen erhält man für die charakteristische Funktion eines Zufallsvektors mit zwei Elementen durch Integration über die Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned}\Phi_{(X_1, X_2)}(j\omega) &= E\left\{e^{(j\omega_1 X_1 + j\omega_2 X_2)}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (3.53)\end{aligned}$$

Durch entsprechende Berechnung der partiellen Ableitungen können hieraus die Verbundmomente berechnet werden.

$$E\{X_1, X_2\} = - \left. \frac{\partial^2 \Phi_{(X_1, X_2)}(j\omega_1, j\omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \right|_{\omega_1 = \omega_2 = 0}. \quad (3.54)$$