

Das in der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtige Konzept der Zufallsvariablen wurde in den vorausgegangenen Kapiteln ausführlich behandelt. Bei dieser Betrachtung wurde das Eintreten zufälliger Ereignisse durch das Konzept der Zufallsvariablen quantitativ beschrieben. Das stochastische Verhalten dieser Zufallsvariablen wurde durch Verteilungsfunktion, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder durch zugehörige Momente eindeutig bestimmt. Zusätzlich wurden Folgen von Zufallsvariablen und deren Grenzwert betrachtet, wobei die wichtige Annahme im Vordergrund stand, dass diese Zufallsvariablen statistisch unabhängig und identisch verteilt seien. Dementsprechend wurde bei den Grenzwertsätzen die hohe Bedeutung des arithmetischen Mittelwertes vor dem Hintergrund dieser Annahmen erkannt.

In der Theorie der stochastischen Prozesse wird ein anderer, zusätzlicher Sachverhalt in den Vordergrund gestellt. Dabei geht es beispielsweise um die Beobachtung eines zufälligen Signals über der Zeit. Es wird also nicht nur eine einzelne Zufallsvariable, sondern eine Vielzahl, eine Menge von Zufallsvariablen, ein so genannter Zufallsprozess betrachtet. Dabei soll insbesondere der zeitlich dynamische Aspekt im Verhalten der Zufallsvariablen untersucht werden. Von zentraler Bedeutung ist die stochastische Bindung der zeitlich benachbarten zufälligen Werte, die durch den Begriff der Korrelation zwischen Zufallsvariablen ausgedrückt wird.

Definition

Stochastische Prozesse sind Familien (Mengen) von Zufallsvariablen $X(t)$, die durch einen Parameter t , bzw. eine Indexmenge gekennzeichnet sind. Dabei durchläuft t einen geeigneten Parameterraum, der den natürlichen Zahlen \mathbb{N} oder auch den reellen Zahlen \mathbb{R} entsprechen kann und in den meisten Anwendungen die Bedeutung einer Zeitvariablen hat.

Beispiel (Lagerhaltung)

Ein bestimmter Artikel werde in einem Lager gehalten. Am Ende jeder Periode, ausgedrückt durch den Zeitpunkt t (Tag, Woche, ...), wird der Lagerbestand $X(t)$ festgestellt. Dieser Lagerbestand hängt ab vom momentanen Bedarf $Y(t)$ zum Zeitpunkt t und von den Bestellregeln, welche die Lagerzufuhr bestimmen und damit eine Grundlage für ein Regelsystem bilden.

Eine mögliche Annahme über den Bedarfsprozess wäre, dass $Y(t)$ unabhängige identisch verteilte diskrete Zufallsvariable sind mit

$$P\{Y(t) = k\} = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

k : Anzahl der bis zum Zeitpunkt t nachgefragten Einheiten des Artikels,

und dass die Bestellregel vom (s, S) -Typ ist, d.h. das Lager wird bis auf S Einheiten aufgefüllt, wenn der Bestand unter den Bestellpunkt s gesunken ist. Negative Lagerbestände sind als Vormerkungen zu interpretieren.

Interessieren wird man sich zum Beispiel für eine kostenoptimale Größe S des Lagers und des Bestellpunktes s .

Beispiel (Warteschlangen)

Zu zufälligen Zeitpunkten treffen „Kunden“ vor einem „Schalter“ ein und fordern eine „Bedienung“. Diese Bedienung erfordert eine bestimmte zufällige Abfertigungszeit. Der Stochastische Prozess $X(t)$ ist in diesem Fall durch die Anzahl der zur Zeit t wartenden Kunden beschrieben. Die Warteschlangen- (Bedienungs-) Theorie stellt die Methoden bereit, um wichtige Kenngrößen – wie z.B. die mittlere Wartezeit eines Kunden oder den Auslastungsgrad – eines Warteschlangensystems zu ermitteln.

Formale Definition eines stochastischen Prozesses

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine nichtleere Indexmenge T .

Stochastischer Prozess $X(t)$

Definition (stochastischer Prozess) Ein stochastischer Prozess ist durch eine Menge (Familie) $X(t) = \{X_t, t \in T\}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit dem gemeinsamen Wertebereich E beschrieben. Der Wertebereich E wird als **Zustandsraum** bezeichnet und ist im allgemeinen durch die reellen Zahlen gekennzeichnet. Der **Parameterraum** wird mit T beschrieben und hat im allgemeinen die Bedeutung einer reellen Zeitvariablen.

Bemerkung:

$X(t)$ wird als *zeitdiskreter* stochastischer Prozess bezeichnet, falls der Parameterraum T abzählbar viele Zeitpunkte enthält. Ein stochastischer Prozess wird dagegen als *zeitkontinuierlich* bezeichnet, falls der Parameterraum T überabzählbar viele Zeitpunkte enthält. Entsprechend kann auch zwischen einem *diskreten* und einem *kontinuierlichen* Zustandsraum E unterschieden werden. Wir wollen uns im Folgenden im Wesentlichen darauf beschränken, dass der Zustandsraum E durch die Menge der reellen Zahlen beschrieben ist.

Musterfunktionen

Man hält zunächst t und damit eine bestimmte Zufallsvariable X_t , d.h. eine messbare Abbildung

$$X_t: \Omega \rightarrow E, \omega \rightarrow X_t(\omega)$$

fest. Verschiedene Elementarereignisse ω liefern dann die verschiedenen Realisierungen $X_t(\omega)$ einer einzelnen Zufallsvariablen $X(t)$.

Man kann sich aber alternativ auch vorstellen, dass zunächst ein Elementarereignis ω ausgewählt und für alle Zufallsvariablen $X(t)$ fixiert wird:

Definition (Musterfunktion) Für jedes (fest gewählte) Elementarereignis $\omega \in \Omega$ wird die resultierende Funktion

$$x_\omega: T \rightarrow E, t \rightarrow x_\omega(t),$$

Musterfunktion
 $x(t)$

die man für einen festgewählten Wert ω aber für einen variablen Parameter t erhält, als **Musterfunktion** bzw. als **Pfad**, **Trajektorie** oder **Realisierung** des stochastischen Prozesses $X(t)$ bezeichnet.

Da bei stochastischen Prozessen meist unerheblich ist, welches Elementarereignis zu einer Musterfunktion führt, schreibt man häufig $x(t)$ anstelle $x_\omega(t)$.

Beispiel (Nachrichtenübertragung)

Zufallsvariable: Eine Signalquelle erzeugt zufällige digitale Sendesymbole $X \in \{-3, -1, 1, 3\}$ (Abbildung 1). Die Wahrscheinlichkeiten $P(X)$ bestimmen die Verteilung der Zufallsvariablen X .

Stochastischer Prozess: Die Signalquelle erzeugt eine Nachricht $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ als Sequenz der Sendesymbole X_n , die auch als Modulationssymbole bezeichnet werden. Die so entstehende Musterfunktion $x(t)$ des betrachteten stochastischen Prozesses ist gegeben durch den Signalverlauf über der Zeit (Abbildung 2), der sich durch die zufällige Auswahl der Sendesymbole X_n ergibt:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \text{rect}(t - nT).$$

In diesem Beispiel werden ein rechteckförmiger Modulationsimpuls und eine Symboldauer von T angenommen.

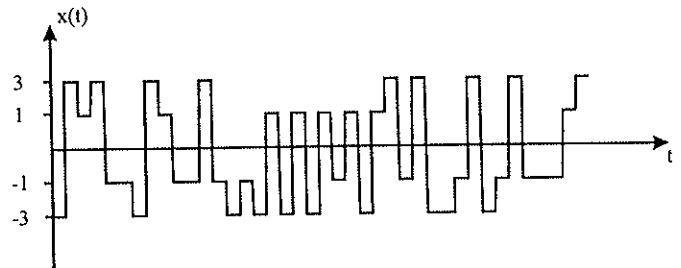
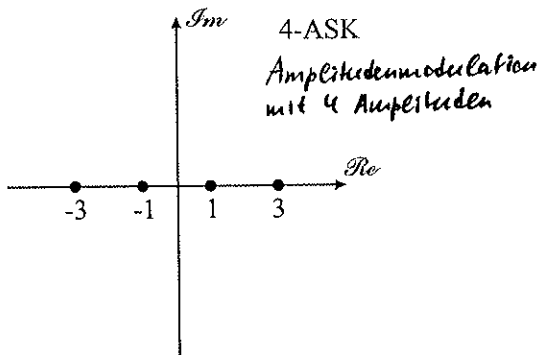


Abbildung 1 Verteilung des Signals zum betrachteten Zeitpunkt

Abbildung 2 : Verlauf des Signals über der Zeit

Beispiel (Thermisches Rauschen)

Jede Spannung einer Schaltung wird durch Störgrößen verändert. Ursache hierfür ist u. a. das thermische Rauschen. Die thermische Rauschleistung eines Widerstandes in einem Frequenzintervall f_g berechnet sich aus:

$$E\{u^2(t)\} = 4f_g k T_{abs} R$$

mit $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{W}{K}$ (Boltzmann-Konstante) und der absoluten Temperatur T_{abs} .

Jede Messung der Rauschspannung ergibt eine *Musterfunktion* des Rauschprozesses.

Beschreibung stochastischer Prozesse

Zunächst stellt sich die wichtige Frage, wie das Verhalten eines solchen stochastischen Prozesses analytisch beschrieben werden kann. Um die analytische Beschreibung vereinfachen und verallgemeinern zu können, werden einige über das Konzept der Zufallsvariablen hinausgehende Eigenschaften definiert. Diese können bei vielen stochastischen Prozessen vorausgesetzt werden und ermöglichen damit eine stark vereinfachte Beschreibung.

Stationarität

Da ein stochastischer Prozess durch eine Menge von Zufallsvariablen dargestellt werden kann, lässt er sich auch entsprechend durch eine Menge von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen beschreiben. So existiert für jedes $t \in T = \{t_1, \dots, t_N\}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{x(t)}(x)$. Der gesamte stochastische Prozess lässt sich dann durch die Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{x(t_1), \dots, x(t_N)}(x_1, \dots, x_N)$ erfassen und analytisch beschreiben.

Definition (streng stationär) Ein stochastischer Prozess $X(t) = \{X_t, t \in T\}$ heißt streng stationär, falls gilt:

streng stationär

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \tau, t_1, \dots, t_n \in T :$$

$$f_{(x(t_1), \dots, x(t_n))}(x_1, \dots, x_n) = f_{(x(t_1+\tau), \dots, x(t_n+\tau))}(x_1, \dots, x_n).$$

D.h., die (endlich-dimensionalen) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind invariant gegenüber Zeitverschiebungen.

Diese Definition ist technisch aber nur sehr schwer überprüfbar.

Definition (Autokorrelation/-kovarianz) Sei $X(t)$ ein beliebiger stochastischer Prozess bei dem die zweiten Momente der einzelnen Zufallsvariablen endliche Werte annehmen. Dann heißt die auf $T \times T$ definierte Funktion

Kovarianzfunktion
Korrelationskoeffizient

$$r(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s) = E\{(X_t - \mu_t) \cdot (X_s - \mu_s)\}$$

(Auto-) Kovarianzfunktion und

$$\rho(t, s) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_s)}{\sqrt{\text{Var}\{X_t\} \text{Var}\{X_s\}}}$$

(Auto-) Korrelationskoeffizient von $X(t)$.

Sei $X(t)$ ein streng stationärer Prozess. Dann sind $E\{X_t\} = \mu$ und $Var\{X_t\} = \sigma^2$ unabhängig von t und die Kovarianzfunktion hängt nur von der Differenz $h = t - s$ ab. Bezeichnen wir sie mit $r(\tau)$, so gilt also

$$r(\tau) = Cov(X_{t+\tau}, X_t) = Cov(X_\tau, X_0).$$

Die Autokovarianzfunktion $r(\tau)$ besitzt dann folgende Eigenschaften:

- $r(\tau) = r(-\tau)$, d.h. $r(\tau)$ ist eine gerade Funktion,
- $r(\tau) \leq r(0) = \sigma^2$,
- $r(\tau)$ ist positiv definit:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \quad \forall t_1, \dots, t_n \in T$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j \cdot r(t_i - t_j) \geq 0.$$

Definition 6.5 ((schwach) stationär) Ein stochastischer Prozess heißt *(schwach) stationär oder stationär im weiteren Sinne*, falls gilt:

(schwach)
stationär

Für alle t ist $E\{X_t\} = \mu$, und die Kovarianzfunktion hängt für beliebiges τ nur von der Zeitdifferenz $t - s = \tau$ aber nicht von der absoluten Zeit t ab, also

$$r(\tau) = Cov(X_{t+\tau}, X_t).$$

Wenn im Folgenden von Stationarität gesprochen wird, ist i.A. von schwacher Stationarität die Rede.

Mit Hilfe dieser Definition der Stationarität ist es möglich, die Momente eines stochastischen Prozesses zu jedem beliebigen Zeitpunkt aus einer Schar von Musterfunktionen zu bestimmen. Dies wird veranschaulicht in Abbildung

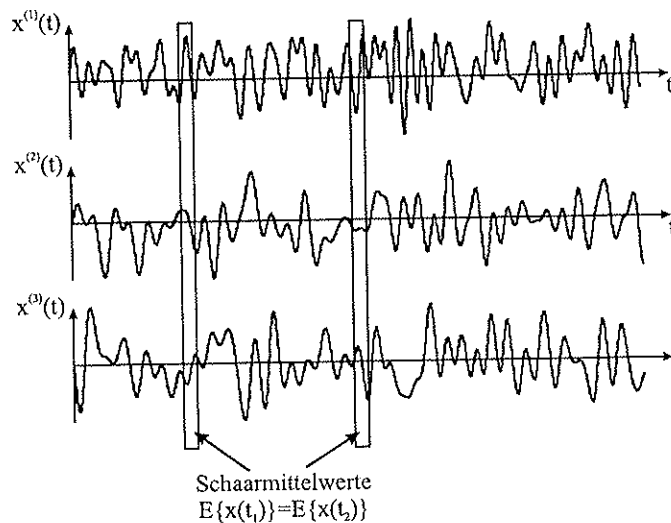


Abbildung Bestimmung des Erwartungswertes über eine Schar von Musterfunktionen

Ergodizität

Die Annahme der Stationarität ist für praktische Anwendungen außerordentlich hilfreich, weil der beobachtete Prozess zu jedem Zeitpunkt sofort analysiert und durch seine Autokorrelationsfunktion vollständig beschrieben werden kann. Allerdings ist die Beobachtung vieler Musterfunktionen notwendig, um einen genügend großen Stichprobenumfang zur Schätzung der Prozessparameter zur Verfügung zu haben. In der Praxis ist aber in der Regel nur eine Musterfunktion eines stochastischen Prozesses bekannt, so dass auch nur diese Information für eine statistische Analyse zur Verfügung steht. Aus diesem Grund wird das Konzept der Stationarität erweitert und eine zusätzliche Forderung erhoben, die durch den Begriff der *Ergodizität* definiert wird.

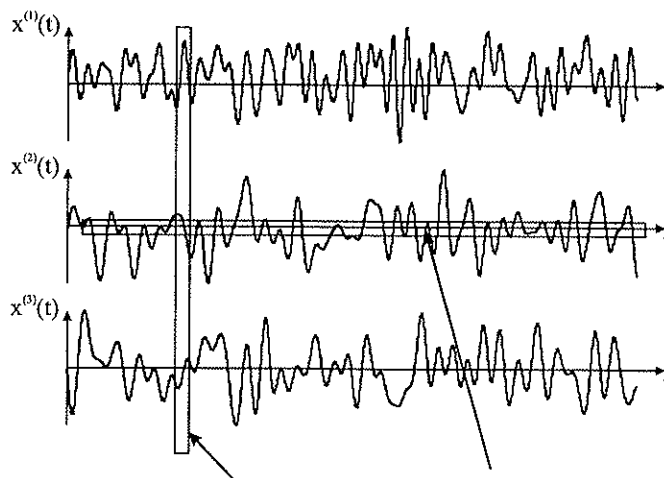
Definition (Ergodizität) Gegeben ist ein im weiteren Sinne stationärer stochastischer Prozess $X(t)$. Wenn sämtliche Schaarmittelwerte $E\{X_t\}$ des Prozesses $X(t)$ identisch sind mit den Zeitmittelwerten \bar{X} jeder einzelnen Musterfunktion $x(t)$, d.h.

Ergodizität

$$E\{x(t)^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n f_X(\xi) d\xi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i^n(t) dt \quad \forall n.$$

so spricht man von einem *ergodischen* Prozess.

Wenn von vornherein bekannt ist, dass es sich bei einem gegebenen stochastischen Prozess um einen ergodischen Prozess handelt, dann können die gesuchten Momente durch die Mittelung über eine einzige Musterfunktion bestimmt werden, wie man in Abbildung erkennen kann. Ein ergodischer Prozess beinhaltet bereits in einer einzigen Realisierung die gesamte dem Prozess innewohnende stochastische Vielfalt und bietet damit den Stichprobenumfang zur Schätzung der Prozessparameter.



Schaarmittelwert $E\{x(t,)\} = \text{Zeitmittelwert } \bar{x}(t)$

Abbildung : Ergodizität

Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion (AKF) $r_{xx}(t_1, t_2)$ eines stochastischen Prozesses $X(t)$ berechnet sich allgemein mittels:

$$r_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} \quad (6.7)$$

Für einen im weiteren Sinne stationären Prozess vereinfacht sich die Rechenvorschrift, da nur noch die Differenz der Betrachtungszeitpunkte von Interesse ist:

$$r_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t-\tau)\} \quad (6.8)$$

Bei einem stationären und ergodischen Prozess ergibt sich die AKF aus einer Musterfunktion $x(t)$:

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t-\tau) dt \quad (6.9)$$

Beschreibung von diskreten stochastischen Prozessen

Die Autokorrelationsfolge (AKF) eines zeitdiskreten, stationären und ergodischen stochastischen Prozesses berechnet sich entsprechend:

$$r_{xx}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \cdot x(n+m)$$

Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion besitzt einige Eigenschaften, mit denen man einige Kenngrößen direkt ablesen kann:

- Mittlere Leistung des Prozesses

$$r_{xx}(m) \leq r_{xx}(0) = E\{|X(m)|^2\} = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

- Reelle, gerade Funktion

$$r_{xx}(-m) = r_{xx}(m)$$

- Konvergenz für nicht periodische Prozesse

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{xx}(m) = \mu_x^2$$

Kreuzkorrelation von stochastischen Prozessen

In vielen Anwendungen werden stochastische Prozesse miteinander kombiniert. Ein häufiger Fall ist hierbei die Addition zweier stochastischer Prozesse. Dies tritt zum Beispiel dann auf, wenn ein Nachrichtensignal bei der Übertragung mit einem Kanalrauschen überlagert wird.

Wir betrachten also den Fall der Addition von zwei stationären Prozessen:

$$X(t) = U(t) + V(t)$$

Da wir wissen, dass ein (ergodischer) stochastischer Prozess eindeutig durch seine Autokorrelationsfunktion beschrieben ist, interessiert uns nun vor allem, wie die Autokorrelationsfunktion des Summenprozesses aussieht:

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= E\{(U(t) + V(t))(U(t + \tau) + V(t + \tau))\} \\ &= E\{U(t)U(t + \tau)\} + E\{U(t)V(t + \tau)\} + \\ &\quad E\{V(t)U(t + \tau)\} + E\{V(t)V(t + \tau)\} \\ &= r_{uu}(\tau) + r_{uv}(\tau) + r_{vu}(\tau) + r_{vv}(\tau) \end{aligned}$$

Kommen bei der Überlagerung der Prozesse zu den AKF der einzelnen Prozesse noch Korrelationsterme beider Prozesse hinzu.

Definition: (Kreuzkorrelationsfunktion) Man bezeichnet

$$r_{uv}(\tau) = E\{U(t)V(t + \tau)\} = r_{vu}(-\tau)$$

Kreuzkorrelation als Kreuzkorrelationsfunktionen (KKF) der stochastischen Prozesse $U(t)$ und $V(t)$.

$r_{uv}(\tau)$

Als Leistung des Summenprozesses ergibt sich:

$$r_{xx}(0) = r_{uu}(0) + r_{vv}(0) + 2r_{uv}(0)$$

Autokovarianzfolge

Autokovarianz

Die Autokovarianz $c_{xx}(m)$ beschreibt die korrelativen Eigenschaften eines mittelwertfreien Prozesses:

$c_{xx}(m)$

$$\begin{aligned} c_{xx}(m) &= E\{(X(n) - \mu_x) \cdot (X(n + m) - \mu_x)\} \\ &= r_{xx}(m) - \mu_x^2 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Autokovarianz kann man die Varianz eines stochastischen Prozesses ermitteln:

$$\text{Var}\{x(t)\} = c_{xx}(0) = E\{x^2(t)\} - \mu_x^2$$

Prognoseverfahren für stochastische Prozesse

Gegeben sei ein stochastischer ergodischer Prozess $v(n)$ mit seiner Autokorrelationsfunktion $r_{vv}(k)$. Die einzelnen Zufallsvariablen $v(n)$ dieses stochastischen Prozesses sollen so gut es geht aus den in der Vergangenheit beobachteten Werten durch eine lineare Verarbeitung vorhergesagt werden. Der vorhergesagte Wert wird mit $\hat{v}(n)$ bezeichnet und ist wie folgt definiert:

$$\hat{v}(n) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot v(n-i)$$

Die Koeffizienten p_i sollen so berechnet und eingestellt werden, dass ein minimaler quadratischer Fehler zwischen dem nächsten Wert $v(n)$ und dem prognostizierten Wert $\hat{v}(n)$ entsteht.

$$F_N = \min_{p_1, p_2, \dots, p_N} E\{(v(n) - \hat{v}(n))^2\}$$

Zur Lösung dieser Optimierungsaufgabe wird die Zielfunktion F_N partiell nach den Parametern bzw. Koeffizienten p_λ mit $\lambda = 1 \dots N$ abgeleitet:

$$F_N = E \left\{ \left(v(n) - \sum_{i=1}^N p_i \cdot v(n-i) \right)^2 \right\}$$

$$\frac{\delta F_N}{\delta p_\lambda} = E \left\{ -2 \cdot v(n-\lambda) \cdot \left(v(n) - \sum_{i=1}^N p_i \cdot v(n-i) \right) \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

Unter Zuhilfenahme der Autokorrelationsfunktion $r_{vv}(\lambda) = E\{v(n) \cdot v(n-\lambda)\}$ folgt die Vereinfachung:

$$-2r_{vv}(\lambda) + 2 \sum_{i=1}^N p_i r_{vv}(\lambda-i) \stackrel{!}{=} 0$$

Hieraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das für $\lambda = 1, \dots, N$ wie folgt ausführlich angegeben werden kann:

$$\begin{pmatrix} r_{vv}(0) & r_{vv}(1) & \dots & r_{vv}(n-2) & r_{vv}(n-1) \\ r_{vv}(1) & r_{vv}(0) & \dots & r_{vv}(n-3) & r_{vv}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{vv}(n-2) & r_{vv}(n-3) & \dots & r_{vv}(0) & r_{vv}(1) \\ r_{vv}(n-1) & r_{vv}(n-2) & \dots & r_{vv}(1) & r_{vv}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N-1} \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{vv}(1) \\ r_{vv}(2) \\ \vdots \\ r_{vv}(N-1) \\ r_{vv}(N) \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich in kompakter Matrixschreibweise:

$$[R_{vv}] \cdot \vec{p} = \vec{r}_{vv}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann durch Invertierung der Kovarianzmatrix R_{vv} direkt gelöst werden:

$$\vec{p} = [R_{vv}]^{-1} \cdot \vec{r}_{vv}$$

Im Folgenden wird zusätzlich ein sehr einfaches Lösungsverfahren dieses linearen Gleichungssystems beschrieben, das rekursiv aufgebaut ist.

Levinson - Algorithmus

Bei diesen Prognoseverfahren muss zur Bestimmung der Prädiktorkoeffizienten p_i folgendes lineare Gleichungssystem gelöst werden:

$$[R_{vv}] \vec{p} = \vec{r}_{vv}$$

Die Kovarianzmatrix R_{vv} hat in ausgeschriebener Form folgende Streifenstruktur, die auch als Toeplitz-Matrix bezeichnet wird:

$$\begin{pmatrix} r_{vv}(0) & r_{vv}(1) & \cdots & r_{vv}(n-1) \\ r_{vv}(1) & r_{vv}(0) & \cdots & r_{vv}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{vv}(n-1) & r_{vv}(n-2) & \cdots & r_{vv}(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{vv}(1) \\ r_{vv}(2) \\ \vdots \\ r_{vv}(n) \end{pmatrix}$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem mit Hilfe des *Gauß-Algorithmus*, so erfordert dies einen Aufwand von $O(n^3)$ Rechenoperationen. Da es sich hier um eine Toeplitz-Matrix handelt, lässt sich zur Lösung des linearen Gleichungssystems der stark aufwandsreduzierte **Levinson-Algorithmus** verwenden. Dieses Verfahren berechnet die Lösung für die Koeffizientenanzahl bzw. Ordnung n rekursiv aus der Lösung für die Ordnung $n-1$. Dadurch reduziert sich der Aufwand dann auf $O(n^2)$.

Bei bekannter Lösung des Gleichungssystems für die Ordnung $n-1$

$$\vec{p}_{n-1} = [R_{vv}]_{n-1}^{-1} \vec{r}_{vv,n-1}$$

hat das Gleichungssystem für die Ordnung n folgende Gestalt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} r_{vv}(0) & r_{vv}(1) & \cdots & r_{vv}(n-2) & r_{vv}(n-1) \\ r_{vv}(1) & r_{vv}(0) & \cdots & r_{vv}(n-3) & r_{vv}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{vv}(n-2) & r_{vv}(n-3) & \cdots & r_{vv}(0) & r_{vv}(1) \\ \hline r_{vv}(n-1) & r_{vv}(n-2) & \cdots & r_{vv}(1) & r_{vv}(0) \end{array} \right) \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ \vdots \\ p_{n-1,n} \\ p_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{vv}(1) \\ r_{vv}(2) \\ \vdots \\ r_{vv}(n-1) \\ r_{vv}(n) \end{pmatrix}$$

Zur besseren Übersicht kann man das lineare Gleichungssystem in einer vereinfachten Schreibweise darstellen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} [R_{vv}]_{n-1} & [Q] \vec{r}_{vv,n-1} & & \\ \hline ([Q] \vec{r}_{vv,n-1})^T & & r_{vv}(0) & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \vec{p}_{1,n} \\ \vdots \\ p_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_{vv,n-1} \\ r_{vv}(n) \end{pmatrix}$$

Hierbei bezeichnet man mit Q die Inversionsmatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der die Reihenfolge der Koeffizienten in einem Vektor vertauscht wird. Zur Lösung des gesamten Gleichungssystems teilt man die Aufgabe in zwei Teilaufgaben der folgenden

Form auf:

$$\begin{aligned} [R_{vv}]_{n-1} \vec{p}_{\cdot, n} + p_{n,n} [Q] \vec{r}_{vv, n-1} &= \vec{r}_{vv, n-1} \\ ([Q] \vec{r}_{vv, n-1})^T \vec{p}_{\cdot, n} + p_{n,n} r_{vv}(0) &= r_{vv}(n) \end{aligned}$$

Wird der Koeffizient $p_{n,n}$ zunächst als bekannt vorausgesetzt, so erhält man aus dem oberen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\cdot, n} &= [R_{vv}]_{n-1}^{-1} (\vec{r}_{vv, n-1} - p_{n,n} [Q] \vec{r}_{vv, n-1}) \\ &= \vec{p}_{n-1} - p_{n,n} [Q] [R_{vv}]_{n-1}^{-1} \vec{r}_{vv, n-1} \\ &= \vec{p}_{n-1} - p_{n,n} [Q] \vec{p}_{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} p_{1, n-1} \\ p_{2, n-1} \\ \vdots \\ p_{n-1, n-1} \end{pmatrix} - p_{n,n} \begin{pmatrix} p_{n-1, n-1} \\ p_{n-2, n-1} \\ \vdots \\ p_{1, n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieses sehr erstaunliche Ergebnis zeigt, dass aus der Kenntnis der Lösung für die Ordnung $n-1$ direkt die Lösung für die Ordnung n mit dieser einfachen Vorschrift berechnet werden kann.

Aus der zweiten Gleichung wird schließlich der noch zu berechnende Koeffizient $p_{n,n}$ durch einsetzen von $\vec{p}_{\cdot, n}$ hergeleitet:

$$\begin{aligned} ([Q] \vec{r}_{vv, n-1})^T \cdot (\vec{p}_{n-1} - p_{n,n} [Q] \vec{p}_{n-1}) + p_{n,n} r_{vv}(0) &= r_{vv}(n) \\ p_{n,n} (r_{vv}(0) - ([Q] \vec{r}_{vv, n-1})^T \cdot [Q] \vec{p}_{n-1}) &= r_{vv}(n) - ([Q] \vec{r}_{vv, n-1})^T \cdot \vec{p}_{n-1} \\ \Rightarrow p_{n,n} &= \frac{r_{vv}(n) - ([Q] \vec{r}_{vv, n-1})^T \cdot \vec{p}_{n-1}}{r_{vv}(0) - ([Q] \vec{r}_{vv, n-1})^T \cdot [Q] \vec{p}_{n-1}} \\ &= \frac{r_{vv}(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{k, n-1} \cdot r_{vv}(n-k)}{r_{vv}(0) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{k, n-1} \cdot r_{vv}(k)} \end{aligned}$$

Das rekursive Verfahren wird für die Ordnung 1 direkt durch Berechnung des einzigen Koeffizienten $p_{1,1}$ begonnen:

$$p_{1,1} = \frac{r_{vv}(1)}{r_{vv}(0)}$$

Die Lösungen des linearen Gleichungssystems für alle höheren Ordnungen können direkt aus der obigen Rekursion mit dem einfachen mathematischen Verfahren berechnet werden. Gleichzeitig wird ein einfaches Kriterium zum Abbruch des Verfahrens hergeleitet: Wenn sich der quadratische Fehler für eine Prognose bei Berechnung der nächst höheren Ordnung nicht wesentlich verändert, dann wird das Verfahren gestoppt.

Dabei ist es sehr hilfreich, dass auch der resultierende quadratische Fehler in jedem Rekursionsschritt wie folgt mit berechnet werden kann.

$$F_N = F_{N-1} \cdot (1 - p_{N,N}^2)$$

Stochastische Signale in LTI-Systemen.

Lineare zeitinvariante Systeme (Linear Time Invariant, LTI) haben eine zentrale Bedeutung in der gesamten Nachrichtentechnik- und Elektrotechnik.

Aus der Systemtheorie ist bekannt, dass für jedes beliebige Eingangssignal $x(t)$ das resultierende Ausgangssignal $y(t)$ durch eine Faltung

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (*)$$

mit der Impulsantwort $h(t)$ des Systems hergeleitet werden kann. Dabei ist $h(t)$ die Antwort des Systems auf einen Dirac-Impuls $\delta(t)$. Aus diesem Grund wird $h(t)$ auch kurz als Impulsantwort des Systems bezeichnet.

Eigenfunktionen Einige Eingangssignale $x_E(t)$, die so genannten Eigenfunktionen, werden bei der Übertragung durch ein solches LTI-System nicht in ihrer Form geändert, sondern lediglich mit einem vom System abhängenden Faktor multipliziert:

$$y(t) = x_E(t) * h(t) = H \cdot x_E(t). \quad 1$$

Bei diesen Eigenfunktionen handelt es sich um komplexe Exponentialfunktionen:

$$x_E(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t). \quad 2$$

Setzt man diese Eigenfunktionen nach Gleichung 2. in Gleichung (*) ein, so ergibt sich

$$y(t) = e^{j\omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{H(j\omega)} \quad 3$$

Somit ist die in Gleichung 1 geforderte Eigenschaft erfüllt. Die Funktion $H(j\omega)$ wird in der Systemtheorie als Übertragungsfunktion des LTI-Systems bezeichnet. Sie beschreibt anschaulich die Amplituden- und Phasenverzerrungen sämtlicher Eigenfunktionen mit vorgegebener Frequenz.

Faltungssatz Ein beliebiges Eingangssignal lässt sich als Überlagerung von Eigenfunktionen beschreiben, wobei sich die frequenzabhängigen Amplitudenfaktoren $X(j\omega)$ durch Fourier-Transformation des Eingangssignals berechnen lassen. Daraus ergibt sich ein zentraler Satz der Systemtheorie, der Faltungssatz:

$y(t)$	=	$x(t)$	*	$h(t)$
↓		↓		↓
$Y(j\omega)$	=	$X(j\omega)$	·	$H(j\omega)$

Kreuzkorrelation zwischen Eingangs- und Ausgangsprozess

Gegeben sei ein LTI-System mit der Impulsantwort $h(t)$. Dieses System wird mit einem stochastischen Prozess $x(t)$ angeregt, so dass am Ausgang wiederum ein stochastischer Prozess $y(t)$ anliegt (Abbildung \star).

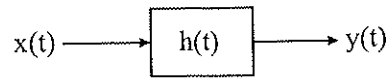


Abbildung \star : Allgemeines LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$

Betrachtet man eine Musterfunktion der stochastischen Prozesse, so ergibt sich das Ausgangssignal durch Faltung zu:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Bei der Transformation in den Frequenzbereich erhält man daraus:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

KKF zwischen Eingangs- und Ausgangsprozess

An dieser Stelle interessiert nun zunächst die Kreuzkorrelation zwischen Eingangs- und Ausgangsprozess:

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= E\{x(t)y(t-\tau)\} \\ &= E\left\{x(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)x(t-\tau-\xi) d\xi\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)E\{x(t)x(t-\tau-\xi)\} d\xi \end{aligned}$$

$$r_{xy}(\tau) = h(-\tau) * r_{xx}(\tau)$$

Wenn der stochastische Prozess $x(t)$ also eine dirac-förmige AKF besitzt, dann beschreibt die Kreuzkorrelationsfunktion direkt die Impulsantwort $h(t)$ des Systems.

Leistungsdichtespektrum

Jeder stochastische Prozess ist eindeutig durch die zugehörige Autokorrelationsfunktion beschrieben. Das Leistungsdichtespektrum eines stochastischen Prozesses kann durch die Fouriertransformation der AKF hergeleitet werden:

Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(j\omega)$

Definition Das **Leistungsdichtespektrum (LDS)** $S_{xx}(j\omega)$ eines stochastischen Prozesses $X(t)$ ergibt sich aus der Fouriertransformierten der AKF $r_{xx}(\tau)$:

$$S_{xx}(j\omega) = \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Bei Betrachtung der inversen Transformation an der Stelle $\tau = 0$

$$r_{xx}(0) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{xx}(j\omega)\}|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(j\omega) d\omega$$

entsteht die Leistung des stochastischen Prozesses.

Interpretation: Der Term $S_{xx}(j\omega)d\omega$ kann als Teilleistung des stochastischen Prozesses aufgefasst werden, die auf das Frequenzband der Breite $d\omega$ entfällt.

Kreuzleistungsdichtefunktion

Kreuzleistungs-
dichtefunktion
 $S_{xy}(j\omega)$

Die Fourier-Transformation der Gleichung mit

$$r_{xy}(\tau) = h(-\tau) * r_{xx}(\tau)$$

$$h(-\tau) \circ \bullet H^*(j\omega)$$

ergibt die **Kreuzleistungsdichtefunktion**

$$S_{xy}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot S_{xx}(j\omega)$$

der stochastischen Prozesse $X(t)$ und $Y(t)$.

Wiener-Lee-Beziehung

Ähnlich erhält man die Autokorrelation des Ausgangsprozesses als

$$r_{yy}(\tau) = h(\tau) * r_{xy}(\tau)$$

Einsetzen der Kreuzkorrelierten liefert: $r_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1), x(t_2)]$

$$r_{yy}(\tau) = h(\tau) * x(\tau) * h(-\tau) * x(-\tau) = h(\tau) * r_{xy}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * r_{xx}(\tau)$$

Mit der **Energie-Autokorrelationsfunktion** des LTI-Systems $r_{hh}^E(\tau)$

$$r_{hh}^E(\tau) = h(\tau) * h(-\tau),$$

die sich aus dessen Impulsantwort $h(t)$ ergibt, und deren Fourier-Transformierten

$$r_{hh}^E(\tau) \circ \bullet |H(j\omega)|^2$$

erhält man

$$S_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{xx}(j\omega).$$

Dieser Zusammenhang wird als **WIENER-LEE-Beziehung** bezeichnet:

WIENER-LEE-
Beziehung

$$\begin{array}{l} r_{yy}(\tau) = r_{hh}^E(\tau) * r_{xx}(\tau) \\ \circ \bullet \quad \quad \quad \circ \bullet \quad \quad \quad \circ \bullet \\ S_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{xx}(j\omega) \end{array}$$

Beispiel (Weißes Rauschen)

Weißes Rauschen (konstante Rauschleistungsdichte) ist ein stochastischer Prozess, dessen LDS folgende Form hat:

$$S_{xx}(j\omega) = N_0$$

Die Autokorrelationsfunktion des weißen Rauschens ist diracförmig und kann wie folgt analytisch angegeben werden:

$$r_{xx}(\tau) = N_0\delta(\tau)$$

Dieser stochastische Prozess besitzt eine unendlich große mittlere Leistung N_x ! Die Filterung dieses stochastischen Prozesses $X(t)$ mit einem idealem Tiefpassfilter mit der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ und der Grenzfrequenz ω_g führt auf das folgende Leistungsdichtespektrum des Prozesses $Y(t)$ am Filterausgang:

$$S_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot N_0 = \left| \text{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_g} \right) \right|^2 N_0.$$

Die mittlere Leistung N_y des Prozesses $Y(t)$ am Ausgang des LTI Systems kann wie folgt berechnet werden:

$$N_y = r_{yy}(0) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} N_0 \omega_g = 2N_0 f_g.$$

Durch die Transformation des stochastischen Prozesses $X(t)$ mit einem LTI System der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ entsteht ein stochastischer Prozess $Y(t)$ am Filterausgang, der eine endliche mittlere Leistung N_y aufweist.

Anwendung: Systemidentifikation durch weißes Rauschen

Die Impulsantwort eines unbekanntes Systems kann durch Anregung des zu untersuchenden Systems mit breitbandigem weißem Rauschen bestimmt werden.

$$S_{xx}(j\omega) = N_0 \quad \circ \rightarrow \quad r_{xx}(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau)$$

Der Rauschprozess ist mittelwertfrei und unkorreliert. Die Kreuzkorrelation am Ausgang beträgt

$$r_{xy}(\tau) = h(\tau) * N_0 \cdot \delta(\tau) = N_0 \cdot h(\tau)$$

Die Impulsantwort des Systems ist also direkt aus der Kreuzkorrelation bestimmbar:

$$h(\tau) = \frac{r_{xy}(\tau)}{N_0}$$

Weißes Gaußsches Rauschen

Bei der Untersuchung von Nachrichtenübertragungseinrichtungen ist das *additive weiße gaußsche Rauschen* (*Additive White Gaussian Noise, AWGN*) von besonderer Bedeutung. Dieser stochastische Prozess $n(t)$ ist durch seine diracförmige Autokorrelationsfunktion oder alternativ durch sein Leistungsdichtespektrum gekennzeichnet. Er besitzt

- ein weißes Leistungsdichtespektrum mit dem Wert¹

$$S_{nn}(j\omega) = N_0$$

¹Mitunter wird das Leistungsdichtespektrum auch mit dem Wert $S_{nn}(j\omega) = \frac{N_0}{2}$ definiert.

- und einer normalverteilten Amplitudendichte für jede der betrachteten Zufallsvariablen $n(t)$.

Anwendung: Korrelationsempfänger, Matched Filter

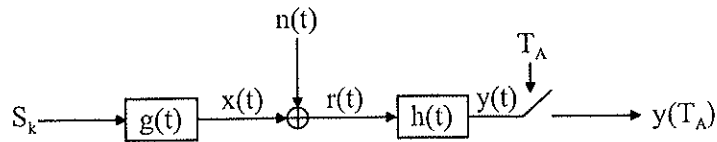


Abbildung 6.6: Anwendungsbeispiel Korrelationsempfänger

In der digitalen Nachrichtenübertragung wird der eingehende Bitstrom zunächst auf die Modulationssymbole S_k abgebildet. Durch die in der Bitfolge enthaltene Zufälligkeit entsteht auch in der Folge der Modulationssymbole eine Zufälligkeit. Das Sendesignal $x(t)$ wird durch die zu übertragenden durchaus komplexwertigen Modulationssymbole S_k und die Modulationsimpulse $g(t)$ gebildet und stellt wegen der zufälligen Folge der Modulationssymbole einen stochastischen Prozess dar. Die Symboldauer ist durch T beschrieben.

$$x(t) = \sum_k S_k g(t - kT)$$

In der Nachrichtenübertragung wird das übertragene Signal $x(t)$ auf dem Übertragungsweg durch äußere Einflüsse und durch Rauschen gestört oder verfälscht. Dieses Rauschen wird modellhaft durch einen entsprechenden AWGN Prozess $n(t)$ beschrieben, der dem Nutzsignal additiv überlagert ist.

Die an den Empfänger gerichtete wesentliche Forderung besteht in der Minimierung der resultierenden Bitfehler. Diese Forderung wird zunächst nicht direkt erfüllt, sondern über einen Umweg erreicht. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit wird genau dann minimiert, wenn das Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis (SNR) zum Entscheidungszeitpunkt maximiert wurde.

Aus diesem Grund wird das Empfangssignal $r(t) = x(t) + n(t)$ zunächst mit einem Filter verarbeitet, dessen Impulsantwort $h(t)$ so berechnet und optimiert wird, dass das resultierende Signal am Filterausgang ein maximales Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis (signal-to-noise-ratio, SNR) zum jeweiligen Abtastzeitpunkt aufweist. Über diesen Schritt wird gleichzeitig die Bitfehlerwahrscheinlichkeit minimiert.

Der Filterprozess kann alternativ auch als eine Korrelationsverarbeitung zwischen dem Empfangssignal und dem Modulationsimpuls $g(t)$ interpretiert werden. Aus diesem Grund

wird auch häufig der Begriff des Korrelationsempfängers verwendet. Die hier diskutierten Verarbeitungsschritte sind in Abbildung 6.6 als Blockdiagramm anschaulich dargestellt.

Ein solcher Korrelationsempfänger verwendet ein Empfangsfilter, dessen Impulsantwort $h(t)$ an den Modulationsimpuls $g(t)$ angepasst ist, weshalb auch häufig die Bezeichnung „matched“-Filter oder Optimalfilter verwendet wird.

Dieser anschaulich erläuterte Sachverhalt wird im Folgenden in einer analytischen Beschreibung untersucht, indem die Frage nach der Form der Impulsantwort $h(t)$ im Empfangsfilter gestellt wird, so dass zum Abtastzeitpunkt ein jeweils maximales SNR entsteht.

Das mit Rauschen überlagerte Empfangssignal kann am Filterausgang und vor der Abtastung wie folgt beschrieben werden:

$$y(t) = [x(t) + n(t)] * h(t)$$

Zur Berechnung des SNR benötigt man die Signalleistung und die mittlere Rauschleistung im Empfangssignal $y(t)$. Die im Filterausgangssignal enthaltene Nutzsignalleistung S wird in den Abtastzeitpunkten T_A wie folgt berechnet:

$$S = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(T_A - \tau) d\tau \right)^2$$

Die mittlere Rauschleistung N am Filterausgang kann mit Hilfe des Parsevallschen Theorems wie folgt berechnet werden:

$$N = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega$$

Damit kann das SNR des Signals am Filterausgang wie folgt angegeben werden:

$$\frac{S}{N} = \frac{1}{N_0} \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(T_A - \tau) d\tau \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2 dt}$$

Mit der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung kann der Zähler in dem obigen SNR wie folgt nach oben abgeschätzt werden.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(T_A - \tau) d\tau \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt$$

Unter Berücksichtigung dieser Abschätzung und der für jedes übertragene Binärzeichen eingesetzten Energie E_b

$$E_b = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt$$

kann das resultierende SNR wie folgt nach oben abgeschätzt werden:

$$\frac{S}{N} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt}{N_0} = \frac{E_b}{N_0}$$

Das maximale SNR kann mit dieser Beziehung auf jeden Fall nicht größer sein als das Verhältnis der pro Bit eingesetzten Energie E_b zur Rauschleistungsdichte N_0 . Diese Tatsache wird zur Herleitung des Optimalfilters bzw. des matched Filters ausgenutzt, indem das SNR für die explizit vorgegebene Filterimpulsantwort

$$h(t) = g(T_A - t).$$

berechnet wird, die durch die zeitinverse Form des Modulationsimpulses definiert ist. In diesem Fall berechnet sich das SNR wie folgt:

$$\frac{S}{N} = \frac{1}{N_0} \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(T_A - \tau) g(T_A - \tau) d\tau \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} g(T_A - \tau)^2(t) dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)^2 d\tau}{N_0} = \frac{E_b}{N_0}.$$

Diese Filterimpulsantwort $h(t) = g(T_A - t)$ maximiert also das SNR am Filterausgang und zu den einzelnen Abtastzeitpunkten und wird deshalb als Optimalfilter bezeichnet. Weil die Form der Impulsantwort $h(t)$ mit der Form des Modulationsimpulses $g(t)$ übereinstimmt wird alternativ die Bezeichnung matched Filter benutzt.