

Kapitel 7 Warteschlangen und Ankunftsprozesse

In diesem Kapitel wird eine spezielle Gruppe stochastischer Prozesse definiert und analysiert, die man in der Theorie der Warteschlangen- und Ankunftsprozesse zusammenfasst.

Ein Warteschlangensystem ist durch zwei Komponenten charakterisiert. Zunächst betrachten wir eine Bedieneinheit in abstrakter Form, die eine bestimmte Verarbeitung durchführt. Diese Bedieneinheit kann ein gesamtes Telefonnetz oder der zentrale Prozessor in einem Rechenzentrum sein. Auf diese Bedieneinheit greifen unterschiedliche Nutzer in zufällig gewählten Zeitpunkten zu. Das Zugreifen auf die Bedieneinheit wird als Ankunftsprozess bezeichnet. Wir interessieren uns dafür, wie häufig Nutzer bzw. in welchen zeitlichen Abständen unterschiedliche Nutzer auf die Bedieneinheit zugreifen oder wie sie sich in eine Warteschlange einreihen. Diesen anschaulich beschriebenen Vorgang beschreiben wir durch einen **Ankunftsprozess**.

In vielen Warteschlangensystemen wird der Ankunftsprozess durch einen sogenannten **Poisson-Prozess** modelliert.

Poisson-Prozess.

Der jeweilige zeitliche Abstand Z_n zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ankünften wird als Zufallsvariable betrachtet. Dabei wird angenommen, dass die einzelnen Zeitintervalle Z_n durch statistisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable beschrieben werden können. Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Z_n wird explizit berechnet. Auch für die Anzahl der Ankünfte innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die sogenannte Poisson-Verteilung explizit hergeleitet.

Zählprozess

Die Länge der Zeitintervalle Z_1, Z_2, \dots, Z_n zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ankünften werden als statistisch unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable beschrieben.

Summiert man die ersten n Zeiten Z_i , so erhält man den Zeitpunkt, der bis zum Eintreffen der n -ten Ankunft vergangen ist:

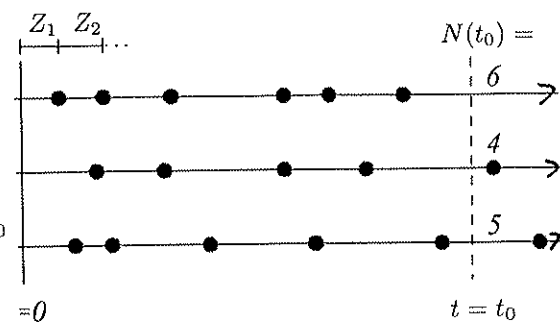
$$G_n^* = \sum_{i=1}^n Z_i$$

Es wird zunächst die Frage aufgegriffen, wie viele Ankünfte bis zum Zeitpunkt $t = t_0$ registriert wurden. Dies wird durch den sogenannten **Zählprozess**

$$N(t) = n, \quad \text{mit } G_n^* \leq t \wedge G_{n+1}^* > t \quad (7.1)$$

beschrieben und durch Musterfunktionen in Abbildung anschaulich verdeutlicht.

Es wird hierbei zunächst ein fester Zeitpunkt $t = t_0$ betrachtet. Der Zählprozess ist durch die Zufallsvariable $N(t_0)$ beschrieben, die darüber Auskunft gibt, wie viele Ankünfte im Intervall $[0, t_0]$ tatsächlich registriert wurden.



Musterfunktion des Ankunftsprozesses

Ankunftsrate

Betrachtet man ein sehr grosses Zeitintervall $[0, t_0]$, so kann man aufgrund der angenommenen Ergodizität des Ankunftsprozesses davon ausgehen, dass im Mittel bei allen Musterfunktionen die gleiche Anzahl von Ankünften gezählt wurden.

Beim Eintreffen von insgesamt $n_A = N(t_0)$ Einheiten in einem festen Intervall $[0, t_0]$ erhält man eine als konstant betrachtete **Ankunftsrate** λ , mit der die mittlere Anzahl Ankünfte pro Zeiteinheit beschrieben wird:

$$\lambda = \frac{n_A}{t_0}$$

Ankunftsrate

λ

Poissonverteilung

Die betrachtete Zeit t_0 soll nun in kleine Intervalle $\Delta t = \frac{t_0}{n}$ unterteilt werden. Diese Intervalle Δt werden so klein gewählt, dass man davon ausgehen kann, dass in einem Intervall maximal eine Ankunft stattfindet.

Eine Ankunft in einem Intervall Δt kann somit als ein *Bernoulli-Versuch* aufgefasst und modellhaft beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit p , mit der eine Ankunft in dem Zeitintervall Δt vorkommt wird wie folgt berechnet:

$$p = P(N(\Delta t) = 1) = \lambda \cdot \Delta t = \lambda \frac{t_0}{n}$$

Entsprechend beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Intervall Δt keine Ankunft registriert wird

$$q = P(N(\Delta t) = 0) = 1 - p.$$

Wir betrachten jetzt wiederum ein längeres Zeitintervall $[0, t_0]$, in dem also insgesamt n kleine Intervalle der Länge Δt angeordnet sind und stellen die Frage, wie viele Ankünfte in diesem Zeitintervall auftreten können. Dieses Zufallsexperiment kann mit der Bernoullischen Versuchsanordnung beschrieben und die resultierende Wahrscheinlichkeit von k Ankünften im Intervall t_0 durch die bereits bekannte *Binomialverteilung* quantitativ berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit für k Ankünfte innerhalb des Zeitintervalls $[0, t_0]$ berechnet sich also wie folgt:

$$P(N(t_0) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ersetzt man jetzt die Wahrscheinlichkeit p durch $\lambda \frac{t_0}{n}$ dann entsteht folgende Beziehung:

$$P(N(t_0) = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda t_0}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t_0}{n}\right)^{n-k}$$

Diese Binomialverteilung analysieren wir für große Werte n und berechnen den Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$. In diesem Fall entsteht folgende Beziehung:

$$P(N(t_0) = k) = \underbrace{\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}}_{\stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} 1} \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda t_0}{n}\right)^n}_{\stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} e^{-\lambda t}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda t_0}{n}\right)^{-k}}_{\stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} 1}$$

In diesem Modell mit wachsendem Parameter n wird die Intervall-Größe $\Delta t \rightarrow 0$ monoton verkleinert. Für den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ berechnet sich aus der obigen Analyse die so genannte **Poisson-Verteilung** mit der folgenden diskreten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

Poisson-
Verteilung
 $\Pi_k(t)$

$$\Pi_k(t_0) = P(N(t_0) = k) = \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} e^{-\lambda t_0}$$

Die Poisson Verteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit in dem oben beschriebenen Zählprozess insgesamt k Ankünfte innerhalb des vorgegebenen Zeitintervalls $[0, t_0]$ registriert wurden.

Erwartungswert und Varianz der Poisson-Verteilung

Es soll jetzt der Erwartungswert und die Varianz der Poisson-Verteilung bestimmt werden. Hierzu betrachtet man zunächst die Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion $e^{\lambda t_0}$:

$$e^{\lambda t_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^k}{k!}$$

Erste und zweite Ableitung nach λ berechnen sich dann zu

$$\begin{aligned} (e^{\lambda t_0})' &= t_0 e^{\lambda t_0} = t_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t_0)^{k-1}}{k!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} \\ (e^{\lambda t_0})'' &= t_0^2 e^{\lambda t_0} = t_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{(\lambda t_0)^{k-2}}{k!} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich jetzt das erste und das zweite Moment folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} E\{N(t_0)\} &= e^{-\lambda t_0} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} = \lambda t_0 \\ E\{(N(t_0))^2\} &= e^{-\lambda t_0} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} = (\lambda t_0)^2 + \lambda t_0. \end{aligned}$$

Somit erhält man für die Varianz

$$\text{VAR}\{N(t_0)\} = E\{(N(t_0))^2\} - (E\{N(t_0)\})^2 = \lambda t_0.$$

Ankunftsabstände

Die Herleitung der Poisson Verteilung soll jetzt benutzt werden, um die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Z_n , mit der das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ankünften beschrieben wird, berechnen zu können. Im Zeitintervall $[0, t_0]$ wird also eine Anzahl k von Ankünften mit folgender Wahrscheinlichkeit registriert:

$$P(N(t_0) = k) = \frac{(\lambda \cdot t_0)^k}{k!} e^{-\lambda t_0}$$

Für den in Gleichung (7.1) formal beschriebenen Zählprozess und die Summe G_k^* der Ankunftsabstände Z_k gilt dann:

$$P(N(t_0) = k) = P(G_k^* \leq t_0 \wedge G_{k+1}^* > t_0) \quad (7.2)$$

An dieser Stelle ist die Verteilung der einzelnen **Ankunftsabstände** Z_k von Interesse. Diese Zufallsvariablen Z_k sind als statistisch unabhängig und identisch verteilt angenommen worden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann deshalb die Zufallsvariable Z_1 in ihrem wahrscheinlichkeitstheoretischen Verhalten untersucht werden.

Wir betrachten die Zufallsvariable Z_1 , mit der die Länge des Zeitintervalls bis zur ersten Ankunft beschrieben wird und einen beliebigen Zeitpunkt t . Zur Berechnung der Verteilungsfunktion F_{Z_1} wird die Wahrscheinlichkeit hergeleitet, mit der im Zeitintervall $[0, t_0]$ keine Ankunft registriert wurde.

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(t) &= P(Z_1 \leq t) = 1 - P(Z_1 > t) \\ &= 1 - P(\text{keine Ankunft in } [0, t]) \end{aligned}$$

Nach Gleichung (7.2) kann man diese Wahrscheinlichkeit direkt durch den Zählprozess $N(t)$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(t) &= 1 - P(N(t) = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Die Ankunftsabstände Z_n sind nach dieser Herleitung negativ exponentialverteilt mit der Verteilungsfunktion $F_Z(t)$ und der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Z(t)$:

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Z \leq t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$f_Z(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$$

Aus diesen Angaben kann der Erwartungswert einer Zufallsvariablen Z , die einer Exponentialverteilung gehorcht, wie folgt berechnet werden:

$$E\{Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Z(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt}_{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung ergibt sich für die Varianz der Exponentialverteilung

$$\text{VAR}\{Z\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Der mittlere zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ankünften ist somit durch $\frac{1}{\lambda}$ und die mittlere Ankunftsrate durch den Parameter λ beschrieben.

Markov - Ketten

In der bisherigen Vorgehensweise dieses Kapitels konnten stochastische Prozesse durch die Eigenschaft der Ergodizität vereinfacht beschrieben werden. In diesem Abschnitt soll nun eine andere Möglichkeit zur Beschreibung stochastischer Prozesse diskutiert werden.

Dafür geht man wieder von der Beschreibung durch endlich-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen aus. Bei einigen Prozessen gilt die sogenannte **MARKOV-Eigenschaft** (Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit): „Der zukünftige Prozessverlauf hängt bei bekanntem, gegenwärtigen Wert nicht vom vergangenen Prozessverlauf ab.“

Die zugehörigen MARKOV-Prozesse werden unterteilt gemäß dem Typ des Parameter- und Zustandsraumes. Im einfachsten Fall – der im Folgenden betrachtet werden soll – sind beide Räume diskret, und wir sprechen von **MARKOV-Ketten**.

Anwendungsbereiche von Markov-Ketten Mit Hilfe dieser Markov-Ketten lässt sich eine in der Praxis häufig auftretende Art von Problemen, insbesondere aus dem Bereich der Warteschlangentheorie, auf sehr einfache und elegante Weise lösen. Zudem werden Markov-Ketten in vielen Bereichen der Informationstechnik und Nachrichtenverarbeitung verwendet:

- als Simulationsmodelle, beispielsweise als einfaches Modell eines drahtlosen Kanals (Gilbert-Elliot Modell) oder zur Simulation von gebündelt auftretenden Nutzeranfragen (z.B. Netzwerk-Anfragen)
- in der Leistungsbewertung von Telekommunikationsnetzen, z.B. zur Abschätzung der mittleren Bedienzeit eines Nutzers

Beispiel (Lagerhaltung, Teil 2)

Wir betrachten nochmals das Lagerhaltungsbeispiel : Es seien also:

- $X_t, t \in \mathbb{N}_0$: Lagerbestand am Ende der Periode t ,
- $Y_t, t \in \mathbb{N}_0$: Bedarf in der Periode t ,
- Y_t unabhängig, identisch verteilt mit $P\{Y_t = k\} = a_k, k \in \mathbb{N}_0$,
- Bestellregel: (s,S)-Politik.

Falls die Lieferfrist nur eine Periode beträgt, so gilt:

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t - Y_{t+1} & \text{falls } X_t > s \\ S - Y_{t+1} & \text{falls } X_t \leq s \end{cases}$$

(Negative Bestände seien als Vormerkungen zugelassen.)

Daraus lässt sich ablesen, dass der Lagerbestand am Ende der Periode $t + 1$ vom gegenwärtigen Lagerbestand der Periode t , nicht jedoch von den Lagerbeständen vergangener Perioden abhängt.

Definition (MARKOV-Kette) Ein stochastischer Prozess $X(t) = \{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ mit abzählbarem Zustandsraum E heisst **MARKOV-Kette (MK)**, falls gilt:

$$\forall t \in \mathbb{N}_0 : \forall j, i, i_{t-1}, \dots, i_0 \in E :$$

$$P\{X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$$

bzw. in verkürzter Schreibweise:

$$P\{X_{t+1} = j | X_t, X_{t-1}, \dots, X_0\} = P\{X_{t+1} = j | X_t\}$$

Eine Markov-Kette ist also ein stochastischer Prozess, bei dem der „nächste“ Zustand X_{t+1} bei bekanntem „gegenwärtigem“ Zustand X_t unabhängig von den „vergangenen“ Zuständen X_{t-1}, \dots, X_0 ist. Da die Zukunft eines solchen stochastischen Prozesses nur von der Gegenwart, nicht jedoch von der Vergangenheit abhängt, spricht man in einem solchen Fall von **Gedächtnislosigkeit**.

Beschreibung und Eigenschaften von Markov-Ketten

Definition (Übergangswahrscheinlichkeit) Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p_{ij}(t, t+1) := p_{j|i}(t, t+1) = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$$

heisst (einschrittige) **Übergangswahrscheinlichkeit (ÜW)** von i nach j .

Übergangswahrscheinlichkeit
 p_{ij}

Definition (homogen) Eine Markov-Kette $X(t)$ heisst **homogen**, falls die einschrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten vom betrachteten Zeitpunkt t unabhängig sind, d.h.

$$p_{ij}(t, t+1) = p_{ij}.$$

homogen

$X(t)$ heisst dann auch Markov-Kette mit **stationären** Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} .

Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Mit Kenntnis dieser Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich im Prinzip die Verbundwahrscheinlichkeiten beliebiger Ordnung bestimmen. Als Beispiel betrachten wir die Verbundwahrscheinlichkeit dritter Ordnung $p_{i,j,k}(l, m, n)$ für das Auftreten der Zustände i, j, k zu den Zeitpunkten $l < m < n$. Nach der Zerlegungsregel für Verbundwahrscheinlichkeiten gilt:

$$p_{i,j,k}(l, m, n) = \begin{cases} p_{k|i,j}(l, m, n) \cdot p_{j|i}(l, m) \cdot p_i(l) & \text{allgemeine Prozesse} \\ p_{k|j}(m, n) \cdot p_{j|i}(l, m) \cdot p_i(l) & \text{Markov-Ketten} \\ p_k(n) \cdot p_j(m) \cdot p_i(l) & \text{statistisch unabhängige Prozesse} \end{cases}$$

Wird diese Zerlegung für den Fall der Markov-Kette auf zeitlich folgende Zustände angewendet, so gibt sie die Wahrscheinlichkeit für eine Trajektorie von Prozesszuständen an.

Beispiel (Trellis-Diagramm)

Bei einem mit $p_i(l)$ gewähltem Anfangszustand eines zweiwertigen digitalen Markov-Prozesses folgt eine Trajektorie $X(l) = 1, X(m) = 0$ und $X(n) = 0$ mit der Verbundwahrscheinlichkeit $p_{1,0,0}(l, m, n) = p_1(l) \cdot p_{10}(l, m) \cdot p_{00}(m, n)$, die anschaulich in Abbildung dargestellt ist. Jede Musterfunktion ist ein möglicher Pfad in diesem Diagramm, deren Verbundwahrscheinlichkeit erfolgt durch Multiplikation der entsprechenden Weggewichte.

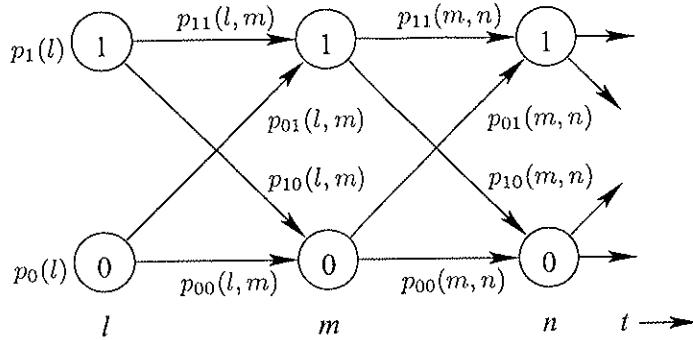


Abbildung Trellis-Diagramm für eine zeitdiskrete Markov-Kette mit zwei Zuständen

Unter Zuhilfenahme der Trellis-Diagramme erkennt man, dass man auch für mehrschrittige Zustandsübergänge eine Übergangswahrscheinlichkeit berechnen kann. Man erhält daraus die sogenannte **CHAPMAN-KOLMOGOROV- oder SMOLUCHOWSKY-Gleichung** zur Berechnung von $(n - l)$ schrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{ik}(l, n) = p_{k|i}(l, n) = \sum_j p_{ij}(l, m) \cdot p_{jk}(m, n)$$

Zur Berechnung der gesuchten Übergangswahrscheinlichkeiten werden also die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Pfade vom Zustand i zum Zustand k aufsummiert.

Übergangsmatrizen

Für die Handhabung von Markov-Ketten ist es sinnvoll, die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} in einem quadratischen Feld $\mathbf{P}_{\tilde{U}} = (p_{ij})$ anzuordnen. $\mathbf{P}_{\tilde{U}}$ heißt **Übergangsmatrix (ÜM)** der Markov-Kette $X(t)$. Für $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist

$$\mathbf{P}_{\tilde{U}} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}_{\tilde{U}}$ besitzt folgende Eigenschaften:

$$\forall i, j \in E : p_{ij} \geq 0 \tag{1}$$

$$\forall i \in E : \sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \quad (\text{Zeilensumme}=1) \tag{2}$$

stochastische Matrix **Definition (stochastische Matrix)** Jede $|E| \times |E|$ -Matrix mit den Eigenschaften (1) und (2) heißt **stochastische Matrix**.

Kolmogorov'sche Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

Werden die Zustandswahrscheinlichkeiten

$$p_k(n) = \sum_i p_i(l) \cdot p_{ik}(l, n)$$

als Komponenten eines Zeilenvektors $P(n) = (p_0(n), p_1(n), \dots, p_K(n))$ betrachtet, so lässt sich das Bildungsgesetz für zeitdiskrete Markov-Ketten mit Hilfe der Übergangsmatrix $\mathbf{P}_{\tilde{U}}$ in der Form

$$P(n) = P(l) \cdot \mathbf{P}_{\tilde{U}}(l, n)$$

zusammenfassen.

Ist nun die Anfangsverteilung der Zustände $P(0)$ vorgegeben, so lautet die Verteilung zum Zeitpunkt n :

$$P(n) = P(0) \cdot \mathbf{P}_{\tilde{U}}(0, n)$$

Hierbei berechnet sich die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten entsprechend der Chapman-Kolmogorov-Gleichung :

$$\mathbf{P}_{\tilde{U}}(l, n) = \mathbf{P}_{\tilde{U}}(l, m) \cdot \mathbf{P}_{\tilde{U}}(m, n)$$

Beispiel (Signalprozess)

Gegeben sei ein binärer Signalprozess mit den Zuständen $X(n) = 0$ oder $X(n) = 1$ als Beispiel einer zweiwertigen Markov-Kette mit dem Anfangsvektor $P(0) = (\alpha, \beta) = (p_0(0), p_1(0))$ und den zeitunabhängigen symmetrischen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{01} = p_{10} = p$ sowie $p_{00} = p_{11} = q = 1 - p$ oder als Übergangsmatrix geschrieben:

$$\mathbf{P}_{\tilde{U}} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\tilde{U}}(0, 1) = \mathbf{P}_{\tilde{U}}(1, 2) = \dots$$

Es soll die Zustandswahrscheinlichkeit nach 2 Zeitschritten bestimmt werden. Die zweischrittige Übergangsmatrix berechnet sich zu:

$$\mathbf{P}_{\tilde{U}}(0, 2) = \mathbf{P}_{\tilde{U}}(2) = \mathbf{P}_{\tilde{U}}(0, 1) \cdot \mathbf{P}_{\tilde{U}}(1, 2) = \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2 + p^2 & 2pq \\ 2pq & q^2 + p^2 \end{pmatrix}$$

Die Zustandswahrscheinlichkeit nach 2 Zeitschritten berechnet sich damit zu:

$$\begin{aligned} P(2) &= P(0) \cdot \mathbf{P}_{\tilde{U}}(0, 2) = (\alpha \cdot (q^2 + p^2) + \beta \cdot 2pq, \alpha \cdot 2pq + \beta \cdot (q^2 + p^2)) \\ &= \frac{1}{2} (1 + (\alpha - \beta) \cdot (q - p)^2, 1 - (\alpha - \beta) \cdot (q - p)^2) \end{aligned}$$

Die bisherigen Berechnungsvorschriften erlauben nur eine iterative Berechnung für langzeitige bzw. höhere Übergangswahrscheinlichkeiten. Im Folgenden soll nun eine direkte Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeitsverteilungen angestrebt werden.

Zu diesem Zweck betrachten wir zwei ausgezeichnete Zeitpunkte $t_1 = m_1 = n - 1$ und $t_2 = m_2 = l + 1$. Die mehrschrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben sich damit zu

$$P_{\check{U}}(l, n) = \begin{cases} P_{\check{U}}(l, n-1) \cdot P_{\check{U}}(n-1, n) \\ P_{\check{U}}(l, l+1) \cdot P_{\check{U}}(l+1, n). \end{cases}$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als **KOLMOGOROV'sche Vorwärts- bzw. Rückwärts-gleichungen**. Sie ergeben sich aus der CHAPMAN-KOLMOGOROV-Gleichung durch Betrachtung eines vorwärts- bzw. rückwärtsgerichteten Zeitpunktes t_1 bzw. t_2 . Die Lösung dieser Gleichungen ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Gleichung :

$$P_{\check{U}}(l, n) = P_{\check{U}}(l, n-2) \cdot P_{\check{U}}(n-2, n-1) \cdot P_{\check{U}}(n-1, n) = \prod_{i=l+1}^n P_{\check{U}}(i-1, i)$$

Homogene Markov-Ketten

Für Markov-Ketten, die die Eigenschaft der Homogenität aus Definition besitzen, vereinfacht sich die Berechnung der Übergangsmatrizen. Bei homogenen Markov-Ketten sind die Übergangswahrscheinlichkeiten vom betrachteten Zeitpunkt unabhängig, so dass man schreiben kann:

$$P_{\check{U}}(n-1, n) = P_{\check{U}}(1) = P_{\check{U}}$$

Für mehrschrittige Übergangswahrscheinlichkeiten gilt im homogenen Fall laut der Vorwärtsgleichung :

$$P_{\check{U}}(l, n) = [P_{\check{U}}]^{n-l} = P_{\check{U}}(n-l)$$

wonach die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht mehr gewählten Zeitpunkt, sondern nur noch von der betrachteten Zeitdifferenz abhängen. Die Zustandswahrscheinlichkeiten lassen sich damit bei vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen $P(0)$ für jeden gewünschten Zeitpunkt berechnen:

$$P(n) = P(0) \cdot [P_{\check{U}}]^n$$

Beispiel (Markov-Kette)

Eine homogene zweistufige Markov-Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{00} = p_{11} = q$ und $p_{01} = p_{10} = p$ bilde den binären Prozess des Beispiels ^{Signal Process}. Gefragt sei nach dem Zustandsdiagramm und der zeitabhängigen Zustandsverteilung $P(n)$ sowie dem Anfangs- oder Startvektor $P(0) = (\alpha, \beta)$ für einen a priori stationären Prozessverlauf. Das entsprechende Zustandsdiagramm zeigt Abbildung (a).

Die Elemente der n -schrittigen Übergangsmatrix $P_{ij}(n) = [P_{ij}]^n$ sind in geschlossener Form angebar und lauten:

$$p_{00}(n) = p_{11}(n) = \frac{1}{2} [1 + (q - p)^n] = q(n)$$

$$p_{01}(n) = p_{10}(n) = \frac{1}{2} [1 - (q - p)^n] = p(n)$$

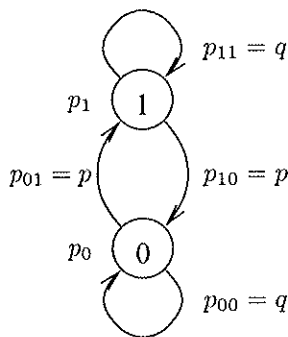
Für die Zustandswahrscheinlichkeiten des binären Signalprozesses gilt dann nach Gleichung (1): $P(n) = P(0) \cdot [P_{ij}]^n$

$$P(n) = P(0) \cdot P_{ij}(n) = (p_0(n), p_1(n)) = \frac{1}{2} (1 + (\alpha - \beta)(q - p)^n, 1 + (\alpha - \beta)(q - p)^n)$$

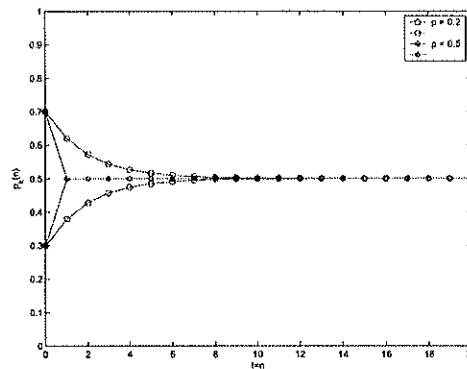
Für $n \rightarrow \infty$ liefert diese Gleichung unabhängig vom Anfangsvektor $P(0)$ den stationären Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten

$$P(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Der zeitliche Verlauf der Zustandswahrscheinlichkeiten ist für verschiedene Werte der Übergangswahrscheinlichkeiten dem Bild (b) zu entnehmen. Für große Werte n strebt $P(n)$ somit gegen eine stationäre Verteilung. Die Markov-Kette ist von vornherein stationär, wenn zum Zeitpunkt $n = 0$ die Binärzeichen gleichverteilt sind.



(a) Zustandsdiagramm



(b) Zeitverhalten

Abbildung Zweiwertiger Markov-Prozess

Beispiel (Bernoulli-Kette)

Eine Bernoulli-Kette ist dadurch gekennzeichnet, dass die zeitlich aufeinanderfolgenden Zustände statistisch unabhängig sind. Damit können die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht beliebig vorgegeben werden, denn bei statistischer Unabhängigkeit gilt:

$$p_{00} = p_{10} = p_0 = \alpha \quad \text{und} \quad p_{11} = p_{01} = p_1 = \beta$$

Für die Zustandswahrscheinlichkeiten ergibt sich deshalb zu jedem Zeitpunkt n

$$p_0 = p_0 p_{00} + p_1 p_{10} = \alpha^2 + \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha(1 - \alpha) = \alpha \quad \text{und}$$

$$p_1 = p_0 p_{01} + p_1 p_{11} = \alpha\beta + \beta^2 = \beta.$$

Eine Bernoulli-Kette ist also von vornherein stationär.