Stochastische Processe, Übungen, WS 2017/2018

4. Übungsblatt, für den 16.11.2017

Beispiel 16

Die diskrete Zufallsvariablen X und Y besitzen gemeinsame Verteilungstabelle

$Y\backslash X$	2	5	8
0.4	0.15	0.30	0.35
0.8	0.05	0.12	0.03

i) Bestimmen Sie die Marginalverteilungsdichte $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.
ii) Bestimen Sie die bedingte Verteilungsdichte $f_{X|Y=0.4}(x)$ und $f_{Y|X=8}(y)$.
iii) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X|Y=0.8]$ und $\mathbb{E}[Y|X=8]$.

Beispiel 17

Sei

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx|y| & \text{für } 0 \leq x \leq 1,\ -x \leq y \leq x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Bestimmen Sie $f_{X|Y=y}(x)$. Für welche $y \in \mathbb{R}$ ist diese Verteilungsdichte überhaupt definiert und warum?
ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X|Y=y]$.

Beispiel 18

Aus einer Urne mit w weißen und s schwarzen Kugeln werden der Reihe nach und ohne die gezogenen Kugeln wieder in die Urne zurückzulegen, alle $w+s$ Kugeln gezogen. Man bestimme die mittlere Anzahl der dabei beobachteten Farbwechsel.
Hinweis: Die Berechnung des gesuchten Erwartungswerts unter Verwendung der Verteilungsdichte führt auf umständliche Formeln. Besser: Definieren Sie $Z_i = 1$, falls ein Farbwechsel zwischen i-ter und $(i+1)$-ter Kugel stattgefunden hat und $Z_i = 0$ sonst und berechnen Sie damit den Erwartungswert.

Beispiel 19

Sei Z eine im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und seien X_1 und X_2 ihre ersten beiden Dezimalstellen. Gesucht ist $\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2]$.

Beispiel 20

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}$ seien positiv, integrierbar, identisch verteilt. Man berechne

$$\mathbb{E}[\frac{X_1 + \cdots + X_m}{X_1 + \cdots + X_{m+n}}].$$

Hinweis: Berechen Sie zuerst

$$\mathbb{E}[\frac{X_1}{X_1 + \cdots + X_{m+n}}].$$