Stochastische Processe, Übungen, WS 2017/2018

8. Übungsblatt, für den 11.01.2018

Beispiel 37

Es sei $\mathcal{B} = \{B_t | t \geq 0\}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Wir betrachten für $t \in [0,1]$ den Prozess $X_t := B_t - tB_1$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) Es gilt $\mathbb{E}[X_t] = 0$ für alle $t \in [0,1]$.

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Auswahl $0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq 1$ ist die Zufallsvariable $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ Gauß'sch.

iii) Für alle $0 \leq s \leq t \leq 1$ gilt $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \min(s,t) - st$.

Beispiel 38

Es sei $\mathcal{B} = \{B_t | t \geq 0\}$ eine eindimensionale Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

i) Für jedes $a > 0$ ist $\{X_t\} := \{\frac{1}{a} B_{a^2 t} | t \geq 0\}$ eine Brown'sche Bewegung in $\mathbb{R}$.

ii) $\{Y_t | t \geq 0\}$ definiert durch $Y_0 = 0$ und $Y_t = tB_{t^{-1}}$ für $t > 0$ ist eine Brown'sche Bewegung.

Beispiel 39

Ein alternierender Prozeß sei durch

$$X_t = \varepsilon_t - X_{t-1},\ t = 1,2,3,\ldots$$

definiert, wobei $\{\varepsilon_t | t \geq 0\}$ ein White-Noise-Prozeß ist mit

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mu,\ \mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma^2,\ X_0 = 0.$$

Wie lauten $\mathbb{E}[X_t], \mathrm{Cov}[X_s, X_t]$ und $\mathrm{Corr}[X_s, X_t]$?

Beispiel 40

Bei Studium von Preis-Reihen ist es wichtig zu beachten, dass die Bildung von Durchschnittspreisen (z.B. über Wochen) Korrelationen induzieren kann, die in den Originalreihen nicht vorhanden sind. Dies wird deutlich anhand der Brown'sche Bewegung

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,\ldots$$

mit dem zentrierten White-Noise-Prozeß: $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$. Wieter sei $X_0 = 0$. Vergleichen Sie die Autokorrelationen der beiden folgenden transformierten Prozessen für t, $t+m$, $t+2m$,. . . , wobei $t > m$ vorausgesetzt wird.

i) $\Delta_m X_t = X_t - X_{t-m}$.

ii) $\Delta_m Y_t = Y_t - Y_{t-m}$ mit $Y_t = \frac{1}{m}(X_t + \cdots + X_{t+m-1})$.