Stochastische Processe, Übungen, WS 2017/2018

9. Übungsblatt, für den 18.01.2018

Beispiel 41

Bestimmen Sie die Koeffizienten des MA-Prozesses mit der Kovarianzfunktion

$$\gamma(1) = 2,\ \gamma(2) = 1,\ \gamma(3) = -1,\ \gamma(\tau) = 0 \text{ für } \tau \geq 4.$$

Ist der Prozeß invertierbar?

Beispiel 42

In der Praxis werden stochastische Prozesse häufig zeitlich aggregiert beobachtet, d.h. anstelle von $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ beobachtet man den aggregierten Prozess $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$,

$$Y_t = X_{ta} + X_{ta-1} + \cdots + X_{ta-(a-1)},$$

wobei jeweils über a Zeitpunkte aggregiert wird.

1. Wenn $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ die Kovarianzfunktion $\gamma(s,t)$ hat, wie lautet dann die Kovarianzfunktion von $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$?

2.) Ist mit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ auch $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ stationär? Wie lautet die Autokovarianzfunktion?

3.) Machen Sie Aussagen über $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, wenn $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ein AR[1]- bzw. MA[1]-Prozess ist.

Beispiel 43

Es sei $\theta > 1$. Zeigen Sie, dass

$$X_t = \frac{1}{\theta} X_{t-1} + \varepsilon_t$$

ein stationärer Prozess ist, wobei $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon)$. Berechnen Sie gleichzeitig den Wert von σ_ε als Funktion von σ_X.

Beispiel 44

Betrachten Sie folgende MA[1] und AR[1] Prozesse:

$$\begin{aligned} &(1) \quad Y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \\ &(2) \quad X_t = \theta X_{t-1} + v_t. \end{aligned}$$

Bilden Sie die differenzierten Variablen $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ bzw. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, und leiten Sie die Autokorrelationsfunktionen $\gamma_{\Delta Y_t}(1)$ und $\gamma_{\Delta X_t}(1)$ her.

Beispiel 45

Sei $X_{tt\in\mathbb{Z}}$ ein Moving Average Prozess zweiter Ordnung MA[2]:

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-2}$$

wobei $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Bestimmen und berechnen Sie die Autokovarianz- sowie die Autokorrelationsfunktion für $\theta = 0.8$.

2. Berechnen Sie die Varianz der arithmetischen Mittels

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$$

   für $\theta = 0.8$.

3. Berechnen Sie erneut die Varianz von $\bar{X}$, wenn $\theta = -0.8$.