11. Übungsblatt

5 $\begin{cases} x_1'(t) = \alpha x_1(t) + x_2(t)\cos t \\ x_2'(t) = \alpha x_2(t) \end{cases}$ $\qquad \varphi(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

DGL für die Abweichung

$$z'(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \cos t \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

Lineare DGL mit periodischen Koeffizienten:

$A(t) = A(t+2\pi)$, $T = 2\pi$

Mittels der Formel von Liouville:

$$\det|\Omega(2\pi;0)| = \mu_1 \cdot \mu_2 = e^{\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{2} a_{ii}(\tau)\, d\tau} = e^{\int_0^{2\pi} 2\alpha\, d\tau} = e^{4\alpha\pi}$$

Fall 1. $\alpha > 0 \Rightarrow e^{4\alpha\pi} > 1 \Rightarrow$ muss zumindest ein charakteristischer Multiplikator einen größeren Betrag als 1 haben

$\Rightarrow$ Nach dem Satz 1.9.3. sind alle Lösungen instabil und nicht attrahierend.

Fall 2 $\alpha < 0$ die Formel von Liouville liefert hier keine Aussage $\Rightarrow$ die charakteristische Multiplikatoren muss man explizit berechnen.

1. Möglichkeit. Berechnung direkt mit Matrizanten $\Omega(T;0)$

Lösen mit DGL

$$\begin{cases} z_1'(t) = \alpha z_1(t) + z_2(t)\cos(t) \\ z_2'(t) = \alpha z_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z_2(t) = C_2 e^{\alpha t} \\ z_1'(t) = \alpha z_1(t) + C_2 e^{\alpha t}\cos(t) \end{array}$$

lineare inhomogene DGL

$z_{1h}(t) = C_1 e^{\alpha t}$

$z_{1s}(t) = e^{\alpha t}(A\cos t + B\sin t)$ durch Einsetzen und Koef. vergleich $A = 0, B = C_2$

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t}\sin t \\ C_2 e^{\alpha t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Fundamental Matrix

$$Y(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y^{-1}(t) = e^{-\alpha t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\sin t \end{pmatrix}$$

$$\Omega(2\pi,0) = Y(2\pi)\cdot Y^{-1}(0) = e^{2\pi\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mu_{1,2} = e^{2\pi\alpha} \Rightarrow$ für $\alpha < 0$ nach dem Satz 1.9.3

Sind die Beträge aller char. Multiplikatoren echt kleiner als 1, dann ist jede Lösung stabil und attrahierend.

2. <u>Möglichkeit</u>.

Aus 2. Gleichung des DGL für Abweichungen

$z_2'(t) = \alpha z_2(t) \Rightarrow z_2(t) = C_2 e^{\alpha t}$

Für die DGL mit periodischen Koeffizienten

$z_2(t+T) = \mu z_2(t)$

$z_2(0) = C_2$

$z_2(2\pi) = C_2 e^{\alpha \cdot 2\pi} \Rightarrow \mu_2 = e^{\alpha \cdot 2\pi}$

aber $\mu_1 \cdot \mu_2 = e^{4\alpha\pi} \Rightarrow \mu_1 = e^{4\alpha\pi} / e^{2\alpha\pi} = e^{2\alpha\pi}$

für $\alpha < 0$ nach dem Satz 1.9.3 ...

die Lösung ist stabil und attrahierend.

<u>Fall 3</u> $\alpha = 0$ $\mu_1 = \mu_2 = 1$ keine Aussage.