Kapitel 2

§ 2.1 Markov Ketten

Markov-Ketten mit kontinuierliche Zeit (KMK)

Definition: Wir betrachten eine Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit $(X_t)_{t\geq 0}$ und bezeichnen für $s \geq t$ und Zustände i, j den Ausdruck

$$\boxed{\mathbb{P}\mathrm{r}[X_t = j \mid X_s = i] = : p_{i\,j}(s,t)}$$

als ***Übergangswahrscheinlichkeit*** von i nach j im Zeitintervall [s,t].

Wir schreiben die Übergangswahrscheinlichkeiten wieder in *Übergangsmatrizen* $\mathrm{P}(s,t) := \left(p_{i\,j}(s,t)\right)$ zusammen.

Definition: Eine Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt ***homogen***, wenn

$$\boxed{p_{i\,j}(r, r+s) = \mathbb{P}\mathrm{r}[X_{r+s} = j \mid X_r = i] = \mathbb{P}\mathrm{r}[X_s = j \mid X_0 = i] = p_{i\,j}(0,s) = p_{i\,j}(s)}$$

Satz: Die ***Chapman-Kolmogorov-Gleichung*** lautet nun (r≤s≤t)

$$\boxed{\mathbf{P}(r,t) = \mathbf{P}(r,s)\,\mathbf{P}(s,t)}$$

und für eine homogene Markov-Kette

$$\boxed{\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{P}(s)}$$

Mit
$p_j(t) := \mathbb{P}\mathrm{r}[X_t = j]$ werden die ***Zustandwahrscheinlichkeiten*** bezeichnet, die ebenso in Zeilenvektoren als Zustandsverteilung $\mathbf{p}(t) := \left(p_j(t)\right)$ zusammengefasst werden,
$\mathbf{p}(0) := \left(p_j(0)\right)$ ist die ***Anfangsverteilung***, wobei $p_j(0) = \mathbb{P}\mathrm{r}[X_0 = j]$.

Bemerkung: Bei vorgegebenen $p_{i\,j}(t)$, die die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen erfüllen, kann man sich zu einer beliebigen Startverteilung $p_i(0) = \mathbb{P}\mathrm{r}[X_0 = i]$ eine homogene Markov-Kette z.B. durch

$$\boxed{p_i(t) := \sum_{j\in I} p_j(0)\, p_{i\,j}(t)}$$

definieren.

Wir wollen nun die Differentialgleichungen von Kolmogorov einführen.
Sei die Übegangsmatrix $\mathbf{P}$ so beschaffen, dass es eine Matrix $\mathbf{\Lambda} := \left(\lambda_{i\,j}\right)$ mit
$\mathbf{\Lambda} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{P}(t, t+\Delta t) - I}{\Delta t}$ gibt, deren Einträge außerhalb der Diagonale positiv sind und deren Zeilensummen 0 sind.
Dann gilt
$\lambda_{i\,j} := \lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_{i\,j}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$ und $\lambda_{i\,i} := \lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_{i\,j}(t, t+\Delta t) - 1}{\Delta t}$, oder

$$p_{i\,j}(t, t+\Delta t) = \begin{cases} \lambda_{i\,j}\,\Delta t + o(\Delta t) & \text{falls } i \neq j \\ (1+\lambda_{i\,i})\,\Delta t + o(\Delta t) & \text{falls } i = j \end{cases} \qquad \lambda_{i\,i} = -\sum_{j\neq i} \lambda_{i\,j}, \quad i, j \in I, \;\; \lambda_i = -\lambda_{i\,i}$$

> **Definition:** Marix Λ bzw. $\lambda_{i\,j}$ heißen ***infinitesimale Generator (Intensitätsmatrix)*** bzw. ***momentane Übergangsraten*** von $(X_t)_{t\geq 0}$

Für i∈I sei $H_i = \inf\{t: X_t \neq i\}$ die Zufallsvariable der Verweilzeit im Zustand i.

> **Satz:** $(X_t)_{t\geq 0}$ sei homogene Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit. Dann ist für jeden Zustand i die Verweilzeit in diesem Zustand exponentiell verteilt:
>
> $$\boxed{\mathbb{P}\mathbf{r}[H_i < t \mid X_0 = i] = 1 - e^{-\lambda_i\, t}}$$
>
> für geeignete λ_i, $0 \leq \lambda_i < \infty$

Beweis.

$\mathbb{P}\mathrm{r}[H_i > t \mid X_0 = i] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\mathrm{r}\left[X_{\frac{k\,t}{n}} = i,\, k = 1, \ldots, n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[p_{i\,i}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \lambda_i \frac{t}{n}\right)^n = e^{-\lambda_i\, t}$

> **Satz:** $(X_t)_{t\geq 0}$ sei homogene Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit. Dann ist für jeden Zustand i die gemeinsame Verteilung der Verweilzeit und Sprung gilt
>
> $$\boxed{\mathbb{P}\mathbf{r}\left[H_i < t,\, X_{H_i+0} = j \mid X_0 = i\right] = \frac{\lambda_{i\,j}}{\lambda_i}\left(1 - e^{-\lambda_i\, t}\right)}$$
>
> für geeignete λ_i, $0 \leq \lambda_i < \infty$

Die momentanen Raten lassen sich wie folgt interpretieren: Wie bereits gezeigt, die Zufallsvariable der Verweilzeit im Zustand i H_i ist exponential verteilt mit einer Rate λ_i.

Welcher Zustand bei Verlassen von i angenommen wird, ist unabhängig von H_i(da Homogenität vorausgesetzt wird).

$q_{i\,j} = \lim_{\Delta t\to 0} \mathbb{P}\mathrm{r}[X_{t+\Delta t} = j \mid X_{t+\Delta t} \neq i,\, X_t = i] = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbb{P}\mathrm{r}[X_{t+\Delta t}=j, X_{t+\Delta t}\neq i | X_t = i]}{\mathbb{P}\mathrm{r}[X_{t+\Delta t}\neq i | X_t = i]}$

sei die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang von i nach j bei Verlassen von i.

Insbesondere gilt wieder

$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbb{P}\mathrm{r}[\text{mindestens 2 Übergänge bis } \Delta t | X_0 = i]}{\Delta t} = 0.$

Damit erhalten wir

- für i≠j

$\lambda_{i\,j} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_{i\,j}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbb{P}\mathrm{r}[X_{\Delta t} = j | X_0 = i]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{q_{i\,j}\,\mathbb{P}\mathrm{r}[H_i \leq \Delta t]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} q_{i\,j} \frac{1-e^{-\lambda_i\, t}}{\Delta t} = q_{i\,j}\,\lambda_i$

λ_i heißt daher auch **momentane Übergangsrate in einen beliebigen anderen Zustand**.

- für i=j erhalten wir

$\lambda_{i\,i} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_{i\,i}(\Delta t)-1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbb{P}\mathrm{r}[X_{\Delta t} = i | X_0 = i]-1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbb{P}\mathrm{r}[H_i > \Delta t]-1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} -\frac{\mathbb{P}\mathrm{r}[H_i \leq \Delta t]}{\Delta t} = -\lambda_i$

Bie der Generatormatrix gilt also für alle i∈I stets

$\lambda_i = -\sum_{j\neq i} \lambda_{i\,j}$ oder $\sum_{j\in I} \lambda_{i\,j} = 0$.

Wenn wir die Bedingung $X_0 = i$ weglassen, so kann es dennoch sogar unendlich viele Übergänge in einem kleinen Zeitintervall geben (eine "Explosion"). Im folgenden nehmen wir an. dass dies micht der Fall ist:

> **Definition:** Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt ***reiner Sprungprozeß*** falls für fast alle Trajektorien w des Prozesses und alle t ein $\varepsilon = \varepsilon_{w,t}$ existiert mit $X_\tau = X_t$ für alle τ∈[t,t+ε[.

> **Definition:** $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt ***reguläre Markov-Kette***, wenn $(X_t)_{t\geq 0}$ reiner Sprungprozess ist und zudem für fast alle w∈Ω in jedem Zeitintervall nur endlich viele Sprünge stattfinden.

Im folgenden nehmen wir also an, daß alle Markovketten regulär seien!

Wir wollen nun die ***Differentialgleichungen von Kolmogorov*** einführen.

> **Satz:** $(X_t)_{t\geq 0}$ sei reguläre KMK. Dann erfüllen die Matrizen P(r,t) und Λ folgende Differentialgleichungen:
>
> (a) Kolmogorov-Vorwärts-Gleichung
>
> $$\boxed{\frac{d}{dt}\,\mathbf{P}(r,t) = \mathbf{P}(r,t)\,\Lambda}$$
>
> (b) Kolmogorov-Rückwärts-Gleichung
>
> $$\boxed{\frac{d}{dt}\,\mathbf{P}(r,t) = -\Lambda\mathbf{P}\,(r,t)}$$
>
> oder für homogene Markov-Kette
>
> (a) Kolmogorov-Vorwärts-Gleichung
>
> $$\boxed{\frac{d}{dt}\,\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\,\Lambda}$$
>
> (b) Kolmogorov-Rückwärts-Gleichung
>
> $$\boxed{\frac{d}{dt}\,\mathbf{P}(t) = -\Lambda\mathbf{P}\,(t)}$$
>
> mit der Anfangsbedingung P(0)=I.

Beweis.

Aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung erhält man

$p_{i\,j}(r,\,t+\Delta\,t) = \sum_{k\in I} p_{i\,k}(r,\,t)\;p_{k\,j}(t,\,t+\Delta\,t)$

oder

$p_{i\,j}(r,\,t+\Delta\,t) - p_{i\,j}(r,\,t) = -p_{i\,j}(r,\,t) + p_{i\,j}(r,\,t)\;p_{j\,j}(t,\,t+\Delta\,t) + \sum_{k\neq j} p_{i\,k}(r,\,t)\;p_{k\,j}(t,\,t+\Delta\,t)$

$\frac{p_{i\,j}(r,t+\Delta\,t)-p_{i\,j}(r,t)}{\Delta\,t} = \frac{\left(p_{j\,j}(t,t+\Delta\,t)-1\right)}{\Delta\,t}\;p_{i\,j}(r,\,t) + \sum_{k\neq j} p_{i\,k}(r,\,t)\;\frac{p_{k\,j}(t,t+\Delta\,t)}{\Delta\,t}$

Falls Δ t→0 es gilt

$\frac{d}{dt}\;p_{i\,j}(r,\,t) = \sum_{k\in I} p_{i\,k}(r,\,t)\;\lambda_{k\,j}.$

In Matrixform

P(r,t+Δt)-**P**(r,t)=**P**(r,t)(**P**(t,t+Δt)-**I**) $\Rightarrow \frac{d\,\mathbf{P}\,(r,t)}{dt}$=**P**(r,t)**Λ**

Und aus

P(r+Δr,t)-**P**(r,t)=(**I**-**P**(r,r+Δr))**P**(r+Δr,t) $\Rightarrow \frac{d\,\mathbf{P}\,(r,t)}{dt}$=-Λ**P**(r,t)

> **Satz:** $(X_t)_{t\geq 0}$ sei reguläre KHMK. Dann erfüllen die Zustandsverteilung **p**(t) und Λ folgende Differentialgleichungen:
>
> (a) Kolmogorov-Vorwärts-Gleichung
>
> $$\boxed{\frac{d}{dt}\,\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t)\,\Lambda}$$

(b) Kolmogorov-Rückwärts-Gleichung

$$\boxed{\frac{d}{dt}\,\mathbf{p}(t) = -\Lambda\mathbf{p}(t)}$$

mit der Anfangsbedingung $p(0)$.

Aus der reellen Analysis ist bekannt, daß für reellwertige Funktionen f aus

$\frac{d}{dt}\, f(t) = c\, f(t)$ folgt: $f(t)=e^{c\,t}$.

Definiert man für Matrizen A die Matrix $e^{t\,A}$ durch

$$e^{t\,A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, A^n$$

so ergibt sich analog aus dem obigen Satz (ohne Beweis)

Satz: Für jedes t≥0 gilt $\mathbf{P}(t)=e^{t\,\Lambda}$ und $\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}(0)e^{t\,\Lambda}$.

Für den Poisson – Prozess mit Parameter λ gilt

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Hat eine Markov-Kette $(X_t)_{t\geq 0}$den Zustandsraum $\mathbb{N}_0$und sind in einem infinitisimalen Zeitintervall nur Sprünge der Höhe ± 1 möglich, so spricht man von einem ***Geburts- und Todesprozess***. Λ hat Tridiagonalgestalt. Gilt außerdem

$\mathbb{P}\mathrm{r}[X_{t+\Delta\,t} = n+1 \mid X_t = n] = \lambda_{n\,n+1}\,\Delta\,t + o(\Delta\,t)$

$\mathbb{P}\mathrm{r}[X_{t+\Delta\,t} = n-1 \mid X_t = n] = \mu_{n\,n-1}\,\Delta\,t + o(\Delta\,t)$

$\mathbb{P}\mathrm{r}[X_{t+\Delta\,t} = n \mid X_t = n] = 1 - (\lambda_{n\,n} + \mu_{n\,n})\,\Delta\,t + o(\Delta\,t)$

so ist der Geburts- und Todesprozess homogen und es gilt

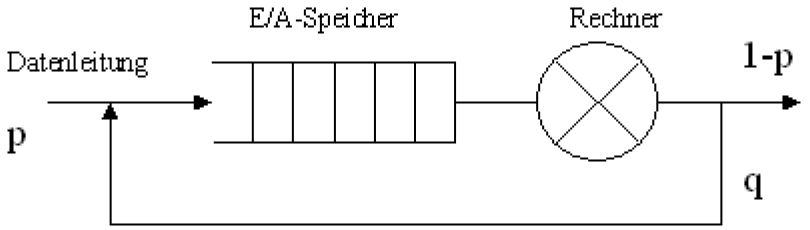
$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{00} & \lambda_{01} & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_{10} & -\lambda_{11} - \mu_{11} & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_{21} & -\lambda_{22} - \mu_{22} & \lambda_{23} & \ldots \\ 0 & 0 & \mu_{32} & -\lambda_{33} - \mu_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Die Größen $\lambda_{n\,n+1}$ heißen ***Geburtsraten*** und $\mu_{n\,n-1}$ - ***Sterberaten***.

Graphische Veranschaulichung von Markov-Ketten

Markov-Ketten mit abzählbarem Zustandsraum werden sehr einfach und übersichtlich durch einen gerichteten gewichteten Graphen, den ***Übergangsgraphen***, veranschaulicht. Die Knoten des Graphen entsprechen den Zuständen, die gerichteten Kanten den Übergangswahrscheinlichkeiten bzw Übergangsraten (für Markov-Ketten mit diskreter bzw. kontinuierlicher Zeit). Zwischen zwei Knoten ist genau dann keine Kante, wenn kein Übergang zwischen ihnen möglich ist.

Beispiel 8: getaktete Datenübertragung über ein Medium mit Fehlern (diskrete Zeit).



■ Mit Wahrscheinlichkeit p kommt im Takt *i* ein Daten-Paket zur Übertragung an (unabhängig von *i*)

■ Dauer der Übertragung eines Paketes: 1 Takt

■ Mit Wahrscheinlichkeit q geschieht ein Fehler, wenn im Takt i eine Übertragung eines Paketes stattfindet (unabhängig von i).

■ In einer Warteschlange können Pakete vor der Übertragung gespeichert werden. Diese Warteschlange ist zu Beginn (im Takt 0) leer.

■ Bei Fehlern werden Pakete neu übertragen. Dazu werden sie am Ende der Warteschlange eingereiht.

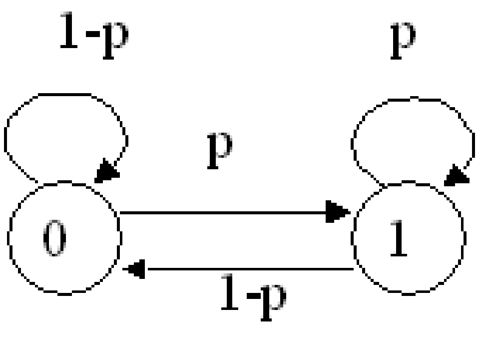
Daraus ergeben sich mehrere stochastische Prozesse, die als die Markov-Ketten betrachtet werden können.

● $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt die einzelnen Ankünfte, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt die Fehler bei der Übertragung

$X_n = \begin{cases} 1, & \text{im } i-\text{ten Takt gibt es eine Ankunft} \\ 0, & \text{im } i-\text{ten Tekt gibt es keine Ankunfte} \end{cases}$ $\quad Y_n = \begin{cases} 1, & \text{im } i-\text{ten Takt ist die Übertragung fehlerlos} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

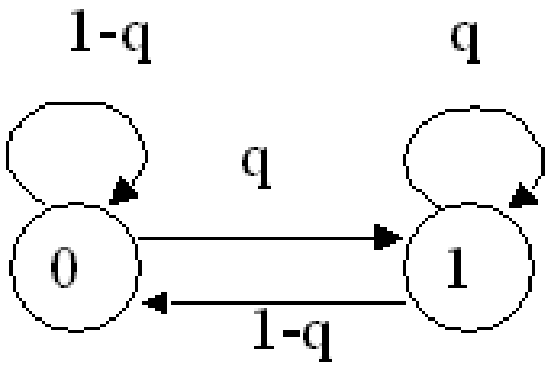
Als Übergangswahrscheinlichkeiten erhalten wir bei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$p_{01}^{(k)} = p_{11}^{(k)} = p,\ \ p_{00}^{(k)} = p_{10}^{(k)} = 1-p,\ \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$



unabhängig von k und ebenso bei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$p_{01}^{(k)} = p_{11}^{(k)} = q,\ \ p_{00}^{(k)} = p_{10}^{(k)} = 1-q,\ \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-q & q \\ 1-q & q \end{pmatrix}$



● $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt die Zahl der Pakete im System (Warteschlange und Übertragungsleitung) am Ende von Takt i.

$\mathbb{P}\mathrm{r}[Z_{i+1} = 1 \mid Z_i = 0] = p_{01} = p$

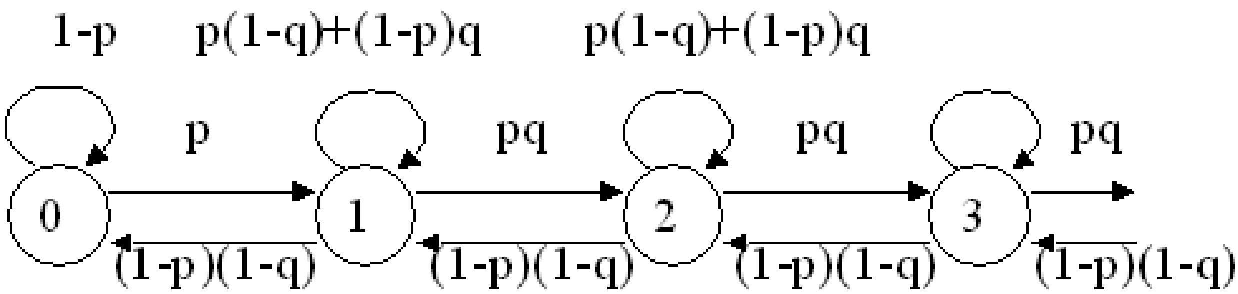
$\mathbb{P}\mathrm{r}[Z_{i+1} = 0 \mid Z_i = 0] = p_{00} = 1 - p$

$\mathbb{P}\mathrm{r}[Z_{i+1} = n+1 \mid Z_i = n] = p_{n\,n+1} = p\,q,\ n>0$

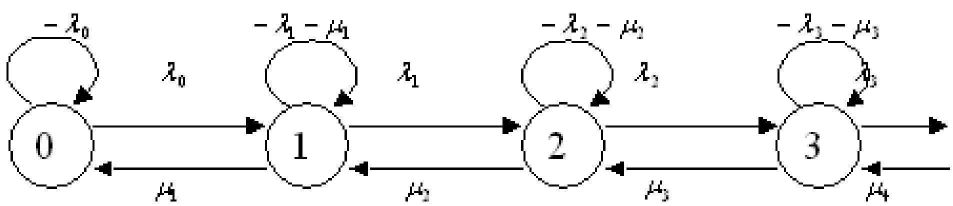
$\mathbb{P}\mathrm{r}[Z_{i+1} = n \mid Z_i = n] = p_{n\,n} = p\,(1-q) + (1-p)\,q,\ n>0$

$\mathbb{P}\mathrm{r}[Z_{i+1} = n \mid Z_i = n+1] = p_{n+1\,n} = (1-p)\,(1-q)$

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & \ldots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & \ldots \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \ldots \\ 0 & 0 & p_{32} & p_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$



<u>Beispiel 9:</u> Homogene Geburts- und Todesprozess (kontinuierliche Zeit)



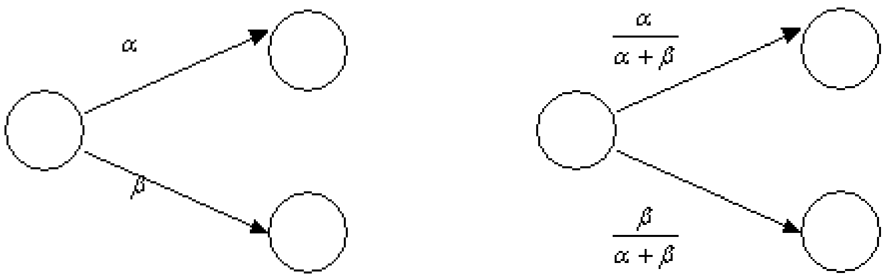
Die eingebettete Markov-Kette

Angennomen, die Modellbildung erfordert die Annahme einer kontinuierlichen Zeit, wir beobachten den Prozess aber nur zu ausgewählten Zeitpunkten, z.B. immer dann, wenn eine Zustandsänderung eintritt. In manchen Fällen erhalten wir bei geschickter Wahl der Beobachtungszeitpunkte eine Markov-Kette. Man nennt sie die eingebettete Markov-Kette. Handelt es sich z.B. ursprünglich um einen Markov-Prozess mit kontinuierlicher Zeit, und beobachtet man bei jeder Zustandsänderung, so entsteht immer eine Markovkette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$q_{i\,j} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbb{P}\mathrm{r}[X_{t+\Delta\, t} = j \mid X_{t+\Delta\, t} \neq i,\ X_t = i] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}\mathrm{r}\left[X_{t+\Delta t} = j, X_{t+\Delta t} \neq i \mid X_t = i\right]}{\mathbb{P}\mathrm{r}\left[X_{t+\Delta t} \neq i \mid X_t = i\right]} =$$

$$\begin{cases} \frac{\lambda_{i\,j}}{\lambda_i} & \text{für } i \neq j \ \text{ vergleich } P[\min(X_1,\ \ldots,\ X_n) = X_i] = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n},\ \text{ falls } X_i \sim \mathcal{E}\,\mathrm{xp}(\lambda_i) \\ 0 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Die Verweilzeit in jedem Zustand i ist exponentialverteilt mit Parameter λ_i, im Erwartungswert also $1/\lambda_i$.



Markov-Kette eingebettete Markov-Kette

Langzeitverhalten für KHMK

Bei Markov-Ketten mit kontinuierlicher Zeit ist die Begriffsbildung analog.

Man sagt, eine Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit besitzt die Grenzverteilung **p**, wenn für alle i, j

> **Definition:** Man sagt, eine Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit besitzt die ***Grenzverteilung*** **p**, wenn für alle i, j
>
> $$\boxed{\lim_{t\to\infty} p_{i\,j}(t) = p_j}$$
>
> gilt bzw.
>
> $$\boxed{\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}}$$

d.h. wenn nach langer Zeit jeder Zustand, unabhängig vom Anfangszustand, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auftritt. Die Grenzverteilung erfüllt wegen

$\mathbf{p}\Lambda = \lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t)\,\Lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\,\mathbf{p}(t) = 0$

die Beziehung

$$\boxed{\mathbf{p}\Lambda = \mathbf{0}}$$

und weil **p** eine Verteilung ist, auch

$$\boxed{\mathbf{p1} = 1}$$

> **Definition:** Jede Verteilung p, die die Beziehung pΛ=0 erfüllt, heißt eine ***stationäre Verteilung*** oder ***Gleichgewichtsverteilung*** der Markov-Kette.

Ist die Markov-Kette endlich, so ist **p** ein normierter Linkseigenvektor von Λ zum Eigenwert 0. Für endliche Markov-Ketten existiert also immer eine stationäre Verteilung.

Bemerkung: Nicht jede stationäre Verteilung ist eine Grenzverteilung. Es gibt Markov-Ketten (auch solche mit kontinuierlicher Zeit), die keine Grenzverteilung aber stationäre Verteilungen besitzen.

Beispiel 10: Man beschreibe die Markov-Ketten mit den Übergangsmatrizen

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}$$

verbal und mit Hilfe des Übergangsgraphen und bestimme jeweils die Grenzverteilung, falls sie existiert, und die stationären Verteilungen.

Beispiel 11: Bestimmen Sie die stationäre Verteilung für die Poisson-Prozess mit dem Parameter λ.

Definition: Eine Markov-Kette, die in ihrer stationären Verteilung startet, ist ***stark stationär***, d.h. die gemeinsame Verteilung von $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ ist für alle t>0 dieselbe wie die von $X_{t+t_1}, X_{t+t_2}, \ldots, X_{t+t_n}$. π_i bzw. p_i kann als der Anteil der Zeit gesehen werden, den die Markov-Kette im Zustand i verbringt.

Klassifikation der Zustände

$(X_t)_{t\geq 0}$ sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum I und Übergangswahrscheinlichkeiten

$p_{i\,j}(r, s) = \mathbb{P}\mathrm{r}[X_s = j \mid X_r = i]$.

Definition: Ein Zustand j∈I heißt ***erreichbar*** vom Zustand i∈I, wenn für jedes r≥0 ein s≥r existiert mit $p_{i\,j}(r, s) > 0$.

Definition: Zwei wechselseitig erreichbare Zustände heißen ***kommunizierend***, in Zeichen i↔j.

Definition: Sind alle Zustände kommunizierend, so heißt die Markov-Kette ***irreduzibel***, es ist also jeder Zustand von jedem Zustand ist erreichbar.

i⟷j ist eine Äquivalenzrelation: Simmetrie und Reflexivität gelten per Definition, zudem gilt für i↔k↔j und geeigneten r, s, t mit $p_{i\,k}(r, t) > 0,\ \ p_{k\,j}(t, s) > 0$:

$p_{i\,j}(r, s) = \sum_{\nu\in I} p_{i\,\nu}(r, t)\, p_{\nu\,j}(t, s) \geq p_{i\,k}(r, t)\, p_{k\,j}(t, s) > 0$

Bezeichne $\tau_j^{(k)} : \Omega \to \mathbb{N}$ bzw. $\tau_j^{(k)} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ die Stopzeiten, d.h. $\tau_j^{(k)}$:=Zeitpunkt des k-ten Besuches in j∈I.

Bezeichne

$f_{i\,j}^{(n)} = \mathbb{P}\mathrm{r}\left[\tau_j^{(1)} = n \mid X_0 = i\right]$ bzw. $f_{i\,j}(t) = \frac{1}{dt}\,\mathbb{P}\mathrm{r}\left[\tau_j^{(1)} \in [t, t + dt] \,\middle|\, X_0 = i\right]$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette, die in i startet nach n Schritten bzw. zur Zeit t das erste Mal nach 0 in j eintrifft.

Definition: Ein Zustand i∈I einer Markov-Kette mit diskreter bzw. kontinuierlicher Zeit heißt ***rekurrent***, wenn

$$\boxed{\mathbb{P}\mathbf{r}\left[\tau_i^{(1)} < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i\,i}^{(n)} = 1} \text{ bzw.}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\mathbf{r}\left[\tau_i^{(1)} < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right] = \int_0^{\infty} f_{i\,i}(t)\, dt = 1}$$

d.h. wenn die Markov-Kette mit Sicherheit nach i zurückkehrt.

Definition: Ein Zustand $i \in$I einer Markov-Kette mit diskreter bzw. kontinuierlicher Zeit heißt ***transient***, wenn

$$\mathbb{P}\mathbf{r}\left[\tau_i^{(1)} < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i\,i}^{(n)} < 1 \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbb{P}\mathbf{r}\left[\tau_i^{(1)} < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right] = \int_0^{\infty} f_{i\,i}(t)\, d t < 1$$

Definition: Ein rekurrenter Zustand $i \in$I einer Markov-Kette mit diskreter bzw. kontinuierlicher Zeit heißt ***positiv rekurrent***, wenn

$$\mathbb{E}\left[\tau_i^{(1)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \mathbb{P}\mathbf{r}\left[\tau_i^{(1)} = n \mid X_0 = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{i\,i}^{(n)} = : m_{i\,i} < \infty \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbb{E}\left[\tau_i^{(1)}\right] = \int_0^{\infty} t\, \mathbb{P}\mathbf{r}\left[\tau_i^{(1)} \in [t, t + d t] \,\middle|\, X_0 = i\right] = \int_0^{\infty} t\, f_{i\,i}(t)\, d t = : m_{i\,i} < \infty$$

d.h. wenn die mittlere Rückkehrzeit $m_{i\,i}$ endlich ist.

Definition: Ein Zustand $i \in$I einer Markov-Kette heißt ***null rekurrent***, wenn er rekurrent aber nicht positive rekurrent ist, d.h.

$$\mathbb{E}\left[\tau_i^{(1)}\right] = \infty$$

Definition: Ein Zustand einer Markov-Kette mit diskreter Zeit heißt periodish mit Periode $d_i > 1$, falls aufeinanderfolgende Rückkünfte nach i nur an Vielfachen von d_i (d_i maximal) möglich sind, d.h. falls $d_i$die größte natürliche Zahl ist, so daß $p_{i\,i}^{(n)} = 0$ für alle nicht durch d_i teilbaren Zahlen n gilt. Gibt es kein solches $d_i > 1$, so heißt i aperiodisch, d.h.

es gilt damit

$$d_i = \operatorname{ggT}\left\{n : p_{i\,i}^{(n)} > 0\right\} = 1$$

Definition: Eine Markov-Kette heißt ***aperiodish*** bzw. ***rekurrent*** bzw. ***transient*** bzw. ***positiv rekurrent*** bzw. ***null rekurrent*** wenn alle Zustände aperiodish bzw. rekurrent bzw. transient bzw. positiv rekurrent bzw. null rekurrent sind.

Die Eigenschaft der Ergodizität. Konvergenzsätze.

Definition: Eine Markov-Kette heißt ***ergodisch***, wenn sie irreduzibel, positiv rekurrent und im Fall diskreter Zeit auch aperiodisch ist.

In diesem Fall kann aus einer einzigen genügend langen Realisierung des Prozesses schon die gesamte Information über den Prozess gewonnen werden. Man kann hier die Ensemble-Mittelwerte durch die entsprechenden Zeit-Mittelwerte ersetzen (stimmen also zeitliche und punkteise Limites überein).

Satz: Eine irreduzible und positive rekurente DHMK bzw. KHMK mit der Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ bzw. $\mathbf{\Lambda}$ besitzt einen stationären Wahrscheinlichkeitsvektor $\pi = \pi\mathbf{P}$ bzw. $\mathbf{p\Lambda}=0$, dessen Komponenten $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ bzw. $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots)$ die folgenden 'Zeitlimites' sind:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} p_{i\,j}^{(s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} p_j^{(s)} = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \frac{1}{m_{j\,j}} = : \pi_j \quad \text{bzw.}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{i\,j}(u)\, d u = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_j(u)\, d u = \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \frac{1}{m_{j\,j}} = : p_j$$

Bemerkung: Endliche irreduzible Markov-Ketten sind also immer positiv rekurrent und haben genau eine Stationäre Verteilung.

Satz (Konvergenzsatz): Für eine irreduzible, positive rekurrente und aperiodische (also ergodische) Markov-Kette mit deskreter Zeit ist die eindeutige stationäre Verteilung auch Grenzverteilung und ist eine Lösung vom Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{i\in I} \pi_i\, p_{i\,j} = \pi_j, \quad j \in I \\ \sum_{i\in I} \pi_i = 1 \end{array}}$$

Satz (Konvergenzsatz): Für eine irreduzible und positive rekurrente Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit ist die eindeutige stationäre Verteilung stets auch Grenzverteilung und ist eine Lösung vom Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{i\in I} p_i\, \lambda_{i\,j} = 0, \quad j \in I \\ \sum_{i\in I} p_i = 1 \end{array}}$$

Andererseits gilt aber auch

$\sum_{i\in I} p_j\, \lambda_{j\,i} = p_j \sum_{i\in I} \lambda_{j\,i} = p_j\; 0 = 0$

Es folgt

$\sum_{i\in I} p_i\, \lambda_{i\,j} = \sum_{i\in I} p_j\, \lambda_{j\,i}$

Dabei haben beide Summe den gemeinsamen Term $p_j\, \lambda_{j\,j}$. Es folgt

Satz: Für eine irreduzible und positive rekurrente reguläre KHMK mit Gleichgewichtsverteilung p gelten für alle j∈I die folgenden ***globalen Balance-Gleichungen***:

$$\boxed{\sum_{i\in I\setminus\{j\}} p_i\, \lambda_{i\,j} = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} p_j\, \lambda_{j\,i}}$$

Die linke Seite dieser Balance-Gleichung ist interpretierbar als 'Wahrscheinlichkeitsluß' in den Zustand *j* hinein, die rechte Seite als 'Wahrscheinlichkeitsfluß' aus dem Zustand *j* heraus.

Die im Gleichgwicht vorliegenden Wahrscheinlichkeiten $p_i$entsprechen dem relativen Zeitanteil, in dem sich die Kette im Zustand *i* befindet (bei Start mit stationärerVerteilung oder aber bei langer Beobachtungszeit). Mit

$p_i\, \lambda_{i\,j} = p_i\, \lambda_i\, q_{i\,j}$ ist es also gerechtfertigt, $p_i\, \lambda_{i\,j}$ als *Rate* der Übergänge von *i* nach *j* zu bezeichnen.

Bemerkung: Hat die eingebettete Markov-Kette die Grenzverteilung π, so gilt die Grenzverteilung p der Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit

$$p_i = \frac{\pi_i\, \mathbb{E}[H_i]}{\sum_j \pi_j\, \mathbb{E}[H_j]} = \frac{\pi_i/\lambda_i}{\sum_j \pi_j/\lambda_j}$$

π_i - bedeutet die relative Häufigkeit, d.h. wie oft der Sprungprozess (Markov-Kette) im Zustand *i* befindet. H_i - die Zufallsvariable der Verweilzeit im Zustand *i*, wobei $H_i \sim \mathcal{E}\mathrm{xp}(\lambda_i) \;\Rightarrow \mathbb{E}[H_i] = \frac{1}{\lambda_i}$, $\lambda_i = -\lambda_{i\,i} = \sum_{j\neq i} \lambda_{i\,j}$

sofern die Reihe $\sum_j \pi_j / \lambda_j$konvergiert. Dafür reicht z.B. aus, dass die mittleren Verweilzeiten beschränkt sind.

Geburts- und Todesprozesse im Gleichgewicht.

Definition: $(X_t)_{t\geq 0}$sei Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \mathbb{N}_0$. $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt ***Geburts-Todes-Prozess*** (GTP, Birth-Death-Process), falls für jeden Zustand $i\in$I nur Zustandsübergänge in i selbst oder aber in die Nachbarzustände i-1 und i+1 möglich sind.

Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ eine KHMK und GTP, so genügen die momentanen Übergangsraten $\lambda_{i\,j}$den Gleichungen

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0, \quad j = i+1, & \text{'Ankunftsrate'} \\ \mu_i \geq 0, \quad j = i-1, & \text{'Abgangsrate'} \\ -(\lambda_i + \mu_i), \ \ i = j, & \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$(X_t)_{t\geq 0}$ heißt ***reiner Geburt-Prozess***, falls $\mu_i = 0$ für alle i$\in$I ist.

$(X_t)_{t\geq 0}$ heißt ***reiner Todes-Prozess***, falls $\lambda_i = 0$ für alle i$\in$I ist.

Λ hat also folgende Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3 - \mu_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Der Prozess ist irreduzibel.Wir betrachten die stationäre Verteilung. Dazu schreiben wir das unendlich große Gleichungssystem

$$\mathbf{p\Lambda=0.}$$

Ein Gleichgewicht existiert genau dann, wenn das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung mit $\sum_i p_i = 1$hat:

$$-\lambda_0\ p_0 + \mu_1\ p_1 = 0$$

$$\lambda_{i-1}\ p_{i-1} - (\lambda_i + \mu_i)\ p_i + \mu_{i+1}\ p_{i+1} = 0 \ \text{ für i}\geq 1$$

Die obigen Gleichungen können als Gleichgewicht zwischen dem Fluss in einem Zustand und dem Fluss aus einem Zustand interpretiert werden (global balance equations).

Also $\lambda_0\ p_0 = \mu_1\ p_1$und per Induktion

$$\mu_{i+1}\ p_{i+1} = \lambda_i\ p_i + \mu_i\ p_i - \lambda_{i-1}\ p_{i-1}$$

$$= \lambda_i\ p_i{+}0$$

damit

$$p_i = p_0\ \frac{\lambda_0\,\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1\,\mu_2 \ldots \mu_i} = p_0 \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}.$$

Soll **p** eine Verteilung werden, so muss

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = p_0 \left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\right) = 1$$

Satz: $(X_t)_{t\geq 0}$sei zeitkontinuierlicher, homogener GTP mit Ankunftsraten $\lambda_i > 0$ und Abgangsraten $\mu_i > 0$.

$(X_t)_{t\geq 0}$ ist dann und nur dann positiv rekurrent (und besitzt damit eine Gleichgewichtsverteilung) falls

die Reihe

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} < \infty}$$

konvergiert.

In diesem Fall gilt

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\right)^{-1} > 0$$