Kapitel 3

§3.4 Zeitabhängiges Verhalten

Die Berechnung des zeitabhängigenVerhaltens einer Markov-Kette erfordert die Lösung der Vorwärtsdifferentialgleichungen von Kolmogorov. Im algemeinen handelt es sich dabei um ein System von unendlich vielen linearen Differentialgleichungen. Eine Lösung ist daher normaleweise schwierig.

Eine Ausnahme bilden die Modelle mit endlichem Zustandsraum.

Ein weiterer Zugang, um zeitabhängiges Verhalten zu analysieren, ist die sogenannte *Busy-period analysis*. Dabei wird die Verteilung der Länge einer Aktivitätsperiode berechnet. Das ist die Zeitspanne zwischen dem Eintreffen eines Kunden in ein leeres System und dem ersten Zeitpunkt nachher, zu dem ein Kunde ein leeres System zurückläßt. Die Verteilung der Länge der Aktivitätsperiode kann durch geringe Modifikation der Vorwärtsdifferentialgleichungen von Kolmogorov gewonnen werden. Nach der Aktivitätsperiode steht das System eine exponentialverteilte Zeitspanne leer. Dann beginnt die nächste Aktivitätsperiode, die dieselbe Verteilung hat wie die vorige.

Modelle mit endlichem Zustandsraum

Dadurch werden alle Systeme mit endlicher Systemkapazität und alle Modelle mit endlicher Population erfasst. Es handelt sich stets um Markov-Ketten mit konstanten Übergangsraten. Die Vorwärtsdifferentialgleichungen von Kolmogorov sind homogene lineare Differentialgleichungssysteme 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Anfangsbedingungen, die sich aus der Anfangsverteilung ergeben. Sie können entweder über die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix oder mittels Laplace-Transformation

$$f(\mathrm{s})=\int_0^\infty f(t)\, e^{-s\,t}\, d t)$$

gelöst werden.

<u>Das M/M/1/1 Modell</u>

In diesem Fall lauten die Vorwärtsdifferentialgleichungen von Kolmogorov

$$p'(t) = p(t)\,\Lambda \text{ mit } \Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda\, p_0(t) + \mu\, p_1(t) \\ p'_1(t) &= \lambda\, p_0(t) - \mu\, p_1(t), \end{aligned}$$

wobei $p_0(t) + p_1(t) = 1$ gelten muss. Als Lösung ergibt sich für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} p_0(t) &= p_0(0)\, e^{-(\lambda+\mu)\,t} + \tfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)\,t}\right) \\ p_1(t) &= p_1(0)\, e^{-(\lambda+\mu)\,t} + \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)\,t}\right). \end{aligned}$$

Lösung und Grenzverteilung existieren für alle $\lambda, \mu > 0$.

Ist

$$\mathbf{p}(0)=\mathbf{p}=\left(\tfrac{\mu}{\lambda+\mu}, \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

d.h. startet der Prozess in der Gleichgewichtsverteilung **p**, so gilt **p**(t)=**p**, d.h. der Prozess bleibt in der Gleichgewichtsverteilung. Sonst nähert sich die Verteilung **p**(t) exponentiell der Gleichgewichtsverteilung.

<u>Das M/M/m/K Modell</u>

In diesem Fall lauten die Vorwärtsdifferentialgleichungen von Kolmogorov

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda\, p_0(t) + \mu\, p_1(t) \\ p'_n(t) &= -(\lambda + n\,\mu)\, p_n(t) + \lambda\, p_{n-1}(t) + (n+1)\,\mu\, p_{n+1}(t), \qquad 1 \leq n \leq m-1 \end{aligned}$$

$$p'_n(t) = -(\lambda + m\,\mu)\; p_n(t) + \lambda\; p_{n-1}(t) + (m+1)\,\mu\; p_{n+1}(t), \quad m \le n \le K\text{-}1$$
$$p'_K(t) = -n\,\mu\; p_K(t) + \lambda\; p_{K-1}(t)$$

```
Eigensystem[{{-l, m}, {l, -m}}]
```

$$\left\{\{0,\ -l-m\},\ \left\{\left\{\frac{m}{l},\ 1\right\},\ \{-1,\ 1\}\right\}\right\}$$

Modelle mit unendlichem Zustandsraum

Das M/M/1/∞ Modell

In diesem Fall lauten die Vorwärtsdifferentialgleichungen von Kolmogorov

$$p'(t) = p(t)\,\Lambda \text{ mit } \Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ldots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

d.h. für n>0

$$p'_0(t) = -\lambda\; p_0(t) + \mu\; p_1(t)$$
$$p'_n(t) = -(\lambda + \mu)\; p_n(t) + \lambda\; p_{n-1}(t) + \mu\; p_{n+1}(t)$$

Dabei handelt es sich um ein System von unendlich vielen linearen Differentialgleichungen. Es wurde erst 1954 gelöst. Die Lösung läßt sich mit Hilfe von Besselfunktionen I_n darstellen. Der Beweisverläuft über erzeugende Funktionen und deren Laplace-Transformierte.

Diese Gleichungssystem kann auch durch erzeugende Funktion (z-Transformierte) zusammen mit Laplace-Transformierte gelößt werden.
Dazu wird die erzeugende Funktion

$$P(z,t) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\, z^n$$

mit z∈ℂ und |z|≤1 eingeführt.
Aus dem Differentialgleichungssystem folgt durch Multiplikation mit z^n und Summation über n

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = \left[\lambda(z-1) + \mu\left(\frac{1}{z} - 1\right)\right] P(z,\,t) + \mu\left(1 - \frac{1}{z}\right) p_0(t).$$

Verwenden wir jetzt die Laplace-Transformierte

$$\pi(z,s) = \int_0^\infty P(z,\,t)\, e^{-s\,t}\, dt \quad \text{und } \pi_0(s) = \int_0^\infty p_0(t)\, e^{-s\,t}\, dt.$$

Daraus folgt

$$s\,\pi(z,\,s) - P(z) = \left[\lambda(z-1) + \mu\left(\frac{1}{z} - 1\right)\right] \pi(z,\,s) + \mu\left(1 - \frac{1}{z}\right) \pi_0(s),$$

wobei $P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0)\, z^n$.
Lösen wir die letzte Gleichung

$$\pi(z,s) = \frac{z\,P(z) - \mu\,\pi_0(s)\,(1-z)}{-\lambda\,z^2 + (s+\lambda+\mu)\,z - \mu}$$

Bleibt es nur $\pi_0(s)$ zu bekommen.
Sei $f(z) = -\lambda\,z^2 + (s+\lambda+\mu)\,z - \mu$ (der Nenner von π(z,s)).
$f(0) = -\mu$ und f(1)=s ⇒ die Gleichung $-\lambda\,z^2 + (s+\lambda+\mu)\,z - \mu = 0$ besitzt immer zwei Lösungen für alle s>0:

$$z_{1,2} = \frac{s+\lambda+\mu}{2\,\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{s+\lambda+\mu}{2\,\lambda}\right)^2 - \frac{\mu}{\lambda}}\ ,$$

wobei $z_{1,2} > 0$,sowie $z_2 = \min\{z_1,\, z_2\} < 1$und $z_1 = \max\{z_1,\, z_2\} > 1$.
Die Funktion wird für alle s>0 und 0≤z≤1 definiert. Bezeichnen wir mit $z(s) = z_2$.
Dann der Zähler von π(z,s) im Punkt (z(s),s) muss null betragen:

$$z\,P(z(s)) - \mu\,\pi_0(s)\,(1 - z(s)) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\pi_0(s) = \frac{z(s)\,P(z(s))}{\mu(1-z(s))}.$$

Nur es nötig die Umkehrfunktion für π(z,s) zu finden, damit die Formeln für $p_n(t)$ gewinnen.

Das M/M/∞ Modell

In diesem Fall lauten die Vorwärtsdifferentialgleichungen von Kolmogorov

$$p'(t) = p(t)\,\Lambda \text{ mit } \Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

d.h. für n>0

$$p'_0(t) = -\lambda\, p_0(t) + \mu\, p_1(t)$$
$$p'_n(t) = -(\lambda + n\,\mu)\, p_n(t) + \lambda\, p_{n-1}(t) + (n+1)\,\mu\, p_{n+1}(t).$$

Als Anfangsbedingung wählen wir **p**(0)=(1,0,0,...).
Auch hier handelt es sich um ein System von unendlich vielen linearen Differentialgleichungen. Die Lösungsmethode kommt aber ohne Laplace Transformation aus.
Sei

$$\mathrm{P}(z,t) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\, z^n$$

die erzeugende Funktion von **p**(t), die für z∈ℂ mit |z|≤1 existiert. Durch Einsetzen in die obigen Differentialgleichungen erhält man eine partielle Differentialgleichung mit Anfangsbedingung für P(z,t), deren Lösung

$$P(z,\,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\left(1-e^{-\mu t}\right)}$$
$$= e^{\frac{\lambda}{\mu} z\left(1-e^{-\mu t}\right)}\; e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)}$$

ist. Entwickeln in eine Potenzreihe ergibt die gesuchten zeitabhängigen Wahrscheinlichkeiten

$$p_n(t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\,(1-e^{-\mu t})\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)}.$$

Auch hier ergibt sich für t→∞ die Grenzverteilung (= stationäre Verteilung)

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n\, n!}\, e^{\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

> Beispiel 19. Bei einem Telefonsystem treffen Anrufe als Poissonstrom mit einer Ankunftsrate von 140 Anrufen pro Stunde ein. Die mittlere Bedienzeit sei 3 Minuten. Für die Bedienung stehe eine sehr große Zahl von Leitungen zur Verfügung, so dass die Annahme eines M/M/∞-Systems gerechtfertigt ist. Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl belegter Leitungen? Man gebe die 90- und 95-Prozentquantile an für die Anzahl der belegten Leitungen an.

Lösung:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{140 \text{ Anrufe}}{60 \text{ Minuten}} \cdot 3\, \frac{\text{Minuten}}{\text{Anruf}} = 7$$

Die mittlere Anzahl der belegten Leitungen ist also 7.

Die Quantilen können wir z.B. durch Aufsummieren der Einzelwahrscheinlichkeiten bestimmen:

n	$\mathbb{P}(N \leq n)$
9	0.830
10	0.901
11	0.947
12	0.973

Die 90%-Quantile ist also gleich 10, die 95%-Quantile 12.