Übung 4

zur Vorlesung "Bedienungstheorie"

4.1 Aufgabe

Betrachten Sie eine Warteschlange M/M/1/M//M (**Maschine Repairman Model**) mit exponential verteilten Zwischenankunftszeiten (mit Rate λ=0.5) und einem Bediener mit ebenfalls exponential verteilten Bedienzeiten (mit Bedienrate $\mu = 0.9$). Die Anzahl der Maschinen ist M. Für jede Maschine, die Intakt ist entstehen die positive kosten c0.
Für jede Maschine, die im Puffer auf eine Reparatur wartet bzw. am Server repariert wird, entstehen die negative Kosten c1 bzw. c2. Konstruieren Sie die mittlere Gesamtkosten C(M) des Systems. Bestimmen Sie den optimalen Wert von M, so dass C(M) maximal ist, wenn c0=3.5, c1=1.5, c2=0.8.

4.2 Aufgabe

Betrachten Sie ein " Reparatur und Reserve" Modell (Vorlesung). Was ergibt sich in diesem Modell für m>Y? Leiten Sie die entsprechenden Formeln für die Zustandswahrscheinlichkeiten und mittlere Wartezeit her. Beantworten Sie die konkrete Fragestellung für λ=0.1, μ=1, m=5 und M=5 bzw. M=50. Wie Groß muss Y sein damit die Wahrscheinlichkeit, dass das System mit weniger als M Mashinen auskommt, kleiner ist als der vorgegebene Wert 0.05.

4.3 Aufgabe

Betrachten Sie eine Warteschlange M/M/1/2 mit Bedienungsrate μ und mit der Ankunftsrate, die bei steigender Anzahl k von zu versendenden Paketen folgendermaßen sinkt: $\lambda'(k) = \frac{\lambda}{k+1}$. Bestimmen Sie die zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten $p_n(t)$ des Systems anhand der Laplace-Transformation $p(s) = \int_0^\infty p(t)\, e^{-s\,t}\, dt$. Nehmen Sie die Werte μ=1; λ=0.8.
Hinweis: Für die Invertierung der Laplace-Transformation verwenden Sie den *Mathematica* Befehl "InverseLaplaceTransform[expr,s,t]". Bestimmen Sie graphisch, für welchen Wert t konvergieren die Wahrscheinlichkeiten $p_n(t)$ gegen der Grenzverteilung p_n.

4.4 Aufgabe

Gegeben sei das $M^{[X]}/M/1$ Warteschlangensystem mit Ankunft in Gruppen, wobei λ=0.5, μ=1, die Gruppengröße hat eine geometrische Verteilung mit dem Parameter $\alpha = 0.3$. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}$[N] sowie die Varianz $\mathbb{V}[N]$ der Anzahl von Kunden im System.
Hinweis: Verwenden Sie dafür die Eigenschaften der erzeugende Funktion P(z).

4.5 Aufgabe

Gegeben sei das $M^{[2]}/M/1$ Warteschlangensystem mit Ankunft in Gruppen mit jeweils zwei Kunden, wobei λ=1/2, μ=3. Bestimmen Sie die Grenzverteilung p_n sowie L, L_q, W und W_q.