Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 - Vorlesung, WS 2011/2012

1.Klausur, am 30.01.2012

Familienname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: ....Studienkennzahl: ....

1. Bitte beantworten die folgenden Fragen. Jede richtige Antwort bringt 5 Punkte. Legen Sie bitte Begründungen und Rechengang bei.
   (a) Sei f die reelle Funktion mit $x \mapsto 2x^5 - 7$. Berechnen Sie $f^{-1}(x)$.
   (b) Ist $(\{-2, 0, 1, 4, -8\}, |)$ eine Kette? ($|$=Teilbarkeit)
   (c) Berechnen Sie die symmetrische Differenz von $[0, 10]$ und $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$.
   (d) Finden Sie ein a, sodass $(1, a, 1)$ und $(2, 2, 3)$ in $\mathbb{R}^3$ einen Winkel von 90 Grad einschließen.
   (e) Wieviele endliche Teilmengen hat $\mathbb{R}$?
   (f) Formulieren Sie mit Quantoren: „Die Menge A hat genau zwei rationale Zahlen als Elemente."
   (g) Ist $((1, 1, 1,), (1, 2, 3), (3, 4, 5))$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?
   (h) Wir zeigen mit Induktion: In jeder Menge von n Linzer Studentinnen sind alle gleich groß. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. Schluss von n auf $n + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung sind die Studentinnen Nr. 1 bis n gleich groß, ebenso die beiden Studentinnen mit Nummern n und $n + 1$. Also sind alle gleich groß. Wo liegt der Haken?
   (i) X sei die Menge aller großen, braven Mengen, also aller unendlichen Mengen M mit $M \notin M$. Gilt $X \in X$?
   (j) Sei $A = \{a, b, c, \dots, z\}$. Ist die Menge aller Wörter der Länge ≥ 10 eine Unterhalbgruppe von $A\star$?
2. (15 Punkte) g sei die Gerade senkrecht zu $2x + 3y + 4z = 5$ und durch $(1, 1, 2)$. Sei h die Gerade durch $(1, 3, 4)$ und $(2, 3, 6)$. Wie nahe kommen sich g und h?
3. (20 Punkte) Es sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis des K^3 für $K = \mathbb{Z}_5$. Weiters sei $v = 2b_2 + 3b_3$. Zeigen Sie, dass (b_1, v, b_3) wieder eine Basis ist. Sind auch (v, b_2, b_3) bzw. (b_1, b_2, v) wieder Basen?
4. (15 Punkte) Verträgliche Äquivalenzrelationen: Was sind sie, wozu sind sie gut? Geben Sie **eigene** Beispiele an!