LA I – Klausur 30.1.2012

KURZE MUSTERLÖSUNGEN

1a) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x+7}{2}}$

b) 1 teilt -2 teilt 4 teilt -8 teilt 0, daher eine Kette.
c) $([0,10] \cup \{11,12,\ldots,20\}) \setminus \{1,2,\ldots,9\}$
d) (1,a,1).(2,2,3) = 0, daher ist a = -5/2
e) c viele (nach 16.28)
f) z.B. $\exists\, |x \in Q \quad \exists\, |y \in Q$: A = {x,y}
g) Nein: 2(1,1,1)+1(1,2,3) = (3,4,5)
h) Der Induktionsschluß funktioniert für alle n, außer für n=2.
i) Ist $X \in X$, so ist X unendlich und es gilt $X \notin X$. Widerspruch. Die Antwort ist also „nein“.
j) A* = Halbgruppe aller Wörter über A. Die Konkatenation zweier Wörter der Länge ≥ 10 hat Länge ≥ 20, daher Länge ≥ 10. Antwort also: „ja“.

2) g: $\mathbf{x} = (1,1,2) + \lambda(2,3,4)$; h: $\mathbf{x} = (1,3,4)+\mu(1,0,2)$. Kürzester Abstand nach 7.18 c) ist $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3) Völlig analog zum „Beweis anhand eines Beispiels“ von 20.7 in der Vorlesung. (b_1,b_2,v) und (b_1,v,b_3) sind wieder Basen (sind l.u. und ihre lineare Hülle ist V), (v,b_2,b_3) dagegen nicht, da v sich durch b_2 und b_3 kombinieren lässt.
[Bemerkung: beachten Sie, K war der Körper mit 7 Elementen!]

4) Da konnte man schreiben: Def. Von Verträglichkeit (14.8). Unbedingt notwendig, um auf den Äquivalenzklassen wieder die kanonische Verknüpfung wohldefiniert zu haben. Aus Halbgruppen, Gruppen, Vektorräumen, … werden Faktorhalbgruppen, Faktorgruppen, Faktorräume,… Bei Faktorräumen sind die Äquivalenzklassen lineare Mannigfaltigkeiten. Eigene Beispiele! Wenn Ihnen nix eingefallen ist und Sie zB die Potenzmenge von |N mit der Gleichmächtigkeit ~ und der Operation $\cap$ genommen haben: {1,2,3}~{2,3,4} und {1,2}~{1,2}, aber $\{1,2,3\} \cap \{1,2\} = \{1,2\}$ und $\{2,3,4\} \cap \{1,2\} = \{2\}$ sind zB nicht gleichmächtig.