

**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 - Vorlesung, WS 2011/2012**

**2.Klausur, am 02.03.2012      Gruppe B**

Familienname: ..... Vorname: .....

Matrikelnummer: ..... Studienkennzahl: .....

1. Bitte beantworten die folgenden Fragen. Jede richtige Antwort bringt 5 Punkte. Legen Sie bitte Begründungen und Rechengang bei.

- (a) Ist  $(\mathbb{Q}, -)$  ein Monoid?
- (b) Geben Sie einen Vektor an, der auf die Gerade  $12x + 5y = 38$  senkrecht steht und die Länge 39 hat.
- (c) Suchen Sie ein  $a \in \mathbb{Z}_{1000}$  mit  $77 \cdot a = 1$  in  $\mathbb{Z}_{1000}$ .
- (d) Bestimmen Sie  $f \circ g \circ h$  für  $f(x) = \exp(x)$ ,  $g(x) = x + 5$ ,  $h(x) = \cos(x)$ .
- (e) Berechnen Sie die Kardinalzahl  $(c \cdot c + 7)^4 \cdot \aleph_0^2 \cdot 2^c + 5$ .
- (f) Ist  $\forall x \in \mathbb{Q} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Z} : |z - (x + y)| \leq 0.5$  wahr oder falsch?
- (g) Bestimmen Sie den Nullraum der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  über  $\mathbb{Z}_5$ .
- (h)  $A$  sei die  $2 \times 2$ -Matrix über  $\mathbb{Z}_7$  mit  $a_{i,j} = i + j$ . Invertieren Sie  $A$ .
- (i) Finden Sie das inverse Element zu  $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{11}$  (bzgl. Addition).
- (j) Wieviele Elemente hat die Potenzmenge von  $\mathbb{Z}_3 \cap \mathbb{Z}_6$ ?

2. (23 Punkte) Auf  $\mathbb{R}^2$  sei die Relation  $R$  gegeben durch  $(a, b)R(c, d)$  falls  $|a| + |b| = |c| + |d|$  gilt. Ist  $R$  eine Ordnungsrelation? Eine Äquivalenzrelation? Wie lautet die Äquivalenzklasse von  $(2, 4)$  und allgemeiner von  $(a, b)$ ? Welche Punkte der Ebene liegen in diesen Äquivalenzklassen? Welche Partition der Ebene ergibt sich durch die Äquivalenzklassen? Finden Sie ein Repräsentatensystem.

3. (15 Punkte) Finden Sie eine Basis des Vektorraums  $V$  aller  $2 \times 3$ -Matrizen über  $\mathbb{Z}_{17}$  und zeigen Sie, dass es sich wirklich um eine Basis handelt. Begründen Sie dabei jeden Schritt. Was ist die Dimension von  $V$ ?

4. (12 Punkte) Wozu ist das vektorielle Produkt gut? Geben Sie dazu auch eigene Beispiele an (die weder im Skriptum stehen, noch in den Übungen gerechnet wurden).