Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 f. Physiker - Vorlesung, SS 2012

Klausur am 25.9.2012

Familienname: Rumpel .... Vorname: Stilzchen ....

Matrikelnummer: .... Studienkennzahl: ....

1. Bitte beantworten die folgenden Fragen. Jede richtige Antwort bringt 5 Punkte. Legen Sie bitte Begründungen und Rechengang bei.

   (a) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ über jedem Körper diagonalisierbar? Nein; Garantie nur für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

   (b) Bestimmen Sie das Image der Abbildung h: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \to (x+y+z, x+z-y)$. $\operatorname{Ker} h = \{0\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} h = 2 \Rightarrow \operatorname{Im} h = \mathbb{R}^2$

   (c) Erstellen Sie die Matrixdarstellung vom obigen h bzgl. irgendwelcher Basen. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ bei kanon. B.

   (d) Wieviele frei wählbare Parameter kann ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit A vom Format 12×15 und Rang $=7$ haben? $n - r = 8$

   (e) A sei die Matrix aus $\mathbb{R}^3_3$, die durch $a_{i,j} := i * j$ gegeben ist. Berechnen Sie $det A$. $= 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ \underline{3} & 6 & 9 \end{pmatrix}$

   (f) Fassen Sie A aus der vorigen Frage als Spiel auf. Gibt es einen Sattelpunkt? Ist das Spiel fair? Sattelp bei $(3,1)$ (unterstrichen). $3 \neq 0$, also unfair

   (g) A sei dieselbe Matrix wie oben. Bestimmen Sie die dazu inverse Matrix. Ex nicht

   (h) Orthonormalisieren Sie $((1, 0, 0), (1, 2, 0), (2, 0, 3))$. $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

   (i) Geben Sie ein lineares Optimierungsproblem an, dessen zulässiger Bereich ein Rechteck ist. z.B. $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ etc

   (j) Im erweiterten Hamming-Code der Länge 8 trifft das Wort 11111011 ein. Decodieren Sie es. $Hy^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq 6$ (binär) $\to$ Fehler an der 6. Stelle
   Ausgesandt! 1111 1111

2. A sei die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenwerte $= 3, -2, 1$ und orthonormale Eigenvektoren von A. Max. 20 Punkte. EV: $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$
   orthon: $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $(1,0,0)$

3. Zeigen Sie ausführlich, dass jede lineare Mannigfaltigkeit als Lösung eines linearen Gleichungssystems beschrieben werden kann. Begrüenden Sie dabei jeden Schritt. Max. 15 Punkte. $= 25.11\ 6)$

4. Ein Physiker und ein Soziologe treten oft bei Werbefahrten auf. Beide haben je zwei überraschende Neuigkeiten aus ihren Fachgebieten auf Lager, und jeder gibt

eine Neuigkeit zum Besten. Das genervte Publikum wählt die Erkenntnis, die besser ankommt. Der Unterlegene muss dem Sieger (je nach Wahlergebnis) 1 bis 2 Bier zahlen. Bei Gleichstand fliesst natürlich kein Bier. Wahlen Sie selbst eine mögliche nicht-triviale Auszahlungsmatrix und berechnen Sie optimale Strategien. Max. 15 Punkte.

je nach Wahl von A...

z.B. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$