Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
1. Übungsblatt für den 12. März 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Welche der folgenden Mengen bilden Basen der jeweiligen Vektorräume? Falls es sich um keine Basis handelt, ergänzen bzw. reduzieren Sie – falls möglich – jeweils zu einer Basis. Falls nicht möglich, geben Sie eine beliebige Basis an.
   (a) $V = P_3(\mathbb{R})$ (siehe Def. 15.6) und $B = (x+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3+1)$.
   (b) $V =$ Vektorraum aus Übung 12.5 des Wintersemesters mit $M = \{1,2,3\}$ und $B = (1,2,3)$.
   (c) $V = (\mathbb{Z}_3)_2^2$, also die 2×2-Matrizen über $\mathbb{Z}_3$ und
   $$B = (\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}).$$

2. (a) Sei $V = P_2(\mathbb{R})$ und sei $U \leq V$ mit $U = \{p | \int_0^1 p(x)dx = 0\}$. Bestimmen Sie eine Basis von U sowie die Dimension von U.
   (b) Sei $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{i-1}e^x$ für $i \in \{1,2,3\}$ und sei $V = L(f_1, f_2, f_3)$. Zeigen oder widerlegen Sie: $B = (f_1, f_2, f_3)$ ist eine Basis von V.

3. Sei V der Vektorraum aus Übung 12.5 des Wintersemesters mit $M = \{1,2,3,4\}$ und $B = (\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\})$. Berechnen Sie die Koordinaten von
   $$\{2,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\} \text{ und } \emptyset$$
   bezüglich B.

4. Seien V wie in 1a) und $B = (2x+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3+2)$. Berechnen Sie die Koordinaten von
   $$6x^3+12x,\ 28x^2+1,\ 18x^2 \text{ und } x^3+2x^2-x+2$$
   bezüglich B.

5. Seien $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x,y,x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$ und $W = \{(x,x,y,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Bestimmen Sie $U + W$.
   (b) Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$.
   (c) Bestimmen Sie $\dim(U + W)$.

6. Seien V, U und W wie in 5).
   (a) Bestimmen Sie $U \cap W$.
   (b) Bestimmen Sie $\dim(U \cap W)$, $\dim(U)$, $\dim(W)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit Satz 21.9 und Ihrem Ergebnis aus 5c).
   (c) Ist die Summe $U + W$ direkt?

7. (a) Seien $V = \mathbb{R}^4$ und $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | 2a+3c = 0 \wedge b-2d = 0\}$. Finden Sie einen Komplementärraum W zu U.
   (b) Seien $V = (\mathbb{Z}_5)_2^2$ und $U = \{\begin{pmatrix}a & b\\ a & 0\end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{Z}_5\}$. Finden Sie einen Komplementärraum W zu U.

8. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und seien $U, W \leq V$. Zeigen Sie: Ist $U \cup W = V$, dann ist bereits $U = V$ oder $W = V$.