Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
2. Übungsblatt für den 19. März 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Bestimmen Sie eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_4^4$, welche die angegebene Bedingung erfüllt:
   (a) $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > 1$
   (b) $a_{ij} = \frac{i}{j}$
   (c) $A + A^t = E$ und $a_{ij} \neq 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$
2. Sei K ein Körper und $A \in K_6^{30},\ B \in K_{10}^{30},\ C \in K_2^6,\ D \in K_{30}^2$. Welche der folgenden Operationen sind möglich? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses.
   (a) $B \cdot D \cdot C \cdot A$
   (b) $C \cdot A + B \cdot D$
3. Zeigen Sie, dass eine Matrix A, welche eine Nullzeile oder eine Nullspalte enthält, nicht invertierbar ist.
4. Sei $m \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Für $A \in K_m^m$ definieren wir
   $$A^0 = E;$$
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^{n+1} = A^n \cdot A.$$
   Sei nun $A \in K_m^m$ mit $A^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist.
   Hinweis: Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.
5. Seien $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Zeigen Sie für $A, B \in K_n^m, C \in K_p^q$
   $$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C.$$
6. Die Matrix $A \in \mathbb{R}_3^4$ sei gegeben durch
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bringen Sie die Matrix A durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Form $E^{(r)}$.
   (b) Bestimmen Sie für A reguläre Matrizen B, C mit $B \cdot A \cdot C = E^{(r)}$.
7. Die Matrix $A \in \mathbb{R}_4^2$ sei gegeben durch
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie die Matrix A durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Form $E^{(r)}$.

(b) Bestimmen Sie für A reguläre Matrizen B, C mit $B \cdot A \cdot C = E^{(r)}$.

8. Berechnen Sie mit der Methode 24.22 aus dem Vorlesungsskriptum die Inverse von A (falls existent):

   (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3$$

   (b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_3)_3^3$$