Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
4. Übungsblatt für den 16. April 2012

1. Sei $V := P_3(\mathbb{R})$, $B = (1, x, x^2, x^3)$ und $C = (1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3)$. Berechnen Sie A_B^C, A_C^B, $A_B^C A_C^B$ und $A_C^B A_B^C$.

2. Sei $V := P_3(\mathbb{R})$ und sei $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ die Abbildung
$$\sum_{k=0}^{3} c_k x^k \mapsto \sum_{k=1}^{3} k c_k x^{k-1}.$$
Finden Sie Basen C und D sodass $A_{h;C,D} = E^{(r)}$ für ein passendes $r \in \mathbb{N}$.

3. Sei $V := P_3(\mathbb{R})$, $W := P(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und sei $h : V \to W$ – wie in der vorhergehenden Aufgabe – die Ableitung.
   (a) Man bestimme $\mathrm{Ker}\, h$ und $V/\,\mathrm{Ker}\, h$.
   (b) Man bestimme $\mathrm{Im}\, h$.
   (c) Man gebe einen Isomorphismus zwischen $V/\,\mathrm{Ker}\, h$ und $\mathrm{Im}\, h$ an.
   (d) Man überprüfe an diesem Beispiel die Dimensionsformel
$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, h + \dim \mathrm{Im}\, h.$$

4. In $V = \mathbb{R}^4$ sind die Basen $B = ((0,1,1,1), (2,0,2,2), (3,3,0,3), (4,4,4,0))$ und $B' = (b_1', b_2', b_3', b_4') = (b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3)$ gegeben. Der Endomorphismus $h : V \to V$ ist durch die Abbildungsmatrix
$$A_{h;B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
gegeben. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $A_{h;B',B'}$ von h bezüglich der Basis B'.

5. Bildet $\mathrm{Aut}_K(V)$ einen Unterraum von $\mathrm{Hom}_K(V, V)$?

6. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie:
   (a) $\forall v \in V : \ (v \neq o \implies \exists \phi \in V^* : \ \phi(v) \neq 0.)$
   (b) Gilt für $v_1, v_2 \in V$ die Beziehung $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ für alle $\phi \in V^*$, so folgt $v_1 = v_2$.

7. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\phi_1, \phi_2 \in V^*$ gegeben durch
$$\phi_1(x, y) = x + 3y, \phi_2(x, y) = 2x + 5y$$
   (a) Weisen Sie nach, dass $B^* = (\phi_1, \phi_2)$ eine Basis von V^* ist.
   (b) Bestimmen sie jene Basis B von V, deren duale Basis B^* ist.

8. Sei V der Vektorraum $P_1(\mathbb{R})$ über dem Körper $\mathbb{R}$. Zwei Basen $B^* = (b_0^*, b_1^*)$ und $C^* = (c_0^*, c_1^*)$ von V^* sind durch
$$b_i^*(p) := \int_0^1 x^i p(x) dx \text{ und } c_0^*(a_1 x + a_0) := a_0 \text{ und } c_1^*(a_1 x + a_0) := a_1$$
gegeben. Geben Sie die Basistransformationsmatrizen von B^* nach C^* und von C^* nach B^* an.