

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
5. Übungsblatt für den 23. April 2012**

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Sei K ein Körper, U , V und W seien K -Vektorräume und $f_1, f_2: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow W$ affine Abbildungen.

- (a) Zeigen Sie: $f_1 + f_2$ und $f_1 \circ g$ sind affine Abbildungen.
(b) Zeigen Sie: Ist $f_1 = h_1 + c$, dann gilt: f ist injektiv (surjektiv) genau dann, wenn h_1 injektiv (surjektiv) ist.

2. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die affine Abbildung, die das Dreieck

$$A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)$$

auf

$$A' = (5, 5), B' = (2, 3), C' = (1, 4)$$

abbildet. Stellen Sie f in der Form $f = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}_2^2$ und $b \in \mathbb{R}^2$ dar.

3. Beweisen Sie Satz 32.9: Sei R eine Dominanzrelation auf X und sei $x \in X$ ein Element mit größter 2-Mächtigkeit. Dann gibt es von x zu jedem $y \in X$ mit $y \neq x$ mindestens eine ein- oder zweistufige Verbindung.
4. Sei $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und

$$xRy :\Leftrightarrow 0 < |x - y| \leq 2.$$

Stellen Sie die Adjazenzmatrix auf und finden Sie alle R -Cliques auf X .

5. (a) Finden Sie für das Spiel mit Auszahlungsmatrix $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ eine

optimale Strategie für beide Spieler.

- (b) Bestimmen Sie den Wert des Spiels.

- (c) Ist das Spiel fair?

6. Ein Bauer hat 100 Hektar Ackerland, auf der er Kartoffeln und Weizen anbauen möchte. Kartoffelsaat kostet 35 Geldeinheiten pro Hektar, Weizen 23 Geldeinheiten pro Hektar. Kartoffelfelder erfordern 10 Einheiten Arbeit pro Hektar, Weizen benötigt 19 Einheiten Arbeit. Zur Verfügung stehen 2500 Geldeinheiten und 1520 Einheiten Arbeit. Der Gewinn für Kartoffeln beträgt 62 Geldeinheiten pro Hektar, Weizen bringt 34 Geldeinheiten Gewinn pro Hektar.

- (a) Stellen Sie das Optimierungsproblem auf und bringen Sie es in Normalform.

- (b) Stellen Sie das Problem graphisch dar.

- (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte.

- (d) Wie viel Kartoffeln und wie viel Weizen soll der Bauer anpflanzen?

7. Sei $C = \{v \in (\mathbb{Z}_2)^6 \mid \text{eine gerade Anzahl von Einträgen von } v \text{ ist } 1\}$.
- (a) Zeigen Sie: C ist ein Unterraum.
 - (b) Bestimmen Sie eine minimale Kontrollmatrix H von C .
 - (c) Ist C besser oder schlechter als ein Wiederholungscode (mit **einer** Wiederholung) mit gleich vielen Codeworten?
8. Zu $x \in (\mathbb{Z}_2)^r$ sei $B_e(x) := \{y \in (\mathbb{Z}_2)^r \mid d(x, y) \leq e\}$. Berechnen Sie $|B_e(x)|$ für $0 \leq e \leq r$. (d ist die Hamming-Distanz, Def. 37.3)