Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
8. Übungsblatt für den 21. Mai 2012

1. Sind die folgenden Matrizen $A, B \in \mathbb{C}_3^3$ diagonalisierbar?

   (a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   Existiert eine reguläre Matrix $C \in GL(3, \mathbb{C})$ mit $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$?

2. Berechnen Sie näherungsweise

$$\begin{pmatrix} -7/2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{100}.$$

   (Hinweis: *Diagonalisieren.*)

3. Sei $f \in K[x]$, sei $g \in K[x]$ und $d = GGT(f, g)$. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\{a \in K \mid \bar{f}(a) = \bar{g}(a) = 0\} = \{a \in K \mid \bar{d}(a) = 0\}.$$

4. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$a^4 + 2a^3 + 5a^2 + 4a + 6 = 0$$
$$a^4 + a^3 + 4a^2 + 2a + 4 = 0$$

   über dem Körper der komplexen Zahlen.

5. Gegeben sind die Permutationen

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \pi' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Zerlegen Sie π und π' in Zyklen.
   (b) Schreiben Sie π und π' als Produkt von Transpositionen.
   (c) Bestimmen Sie $\text{sign}(\pi)$ und $\text{sign}(\pi')$.

6. (a) Bestimmen Sie das kleinste $d > 0$ mit $\pi^d = \text{id}$ für die Permutation $\pi = (1, 2, 6, 7) \circ (3, 4, 5) \in S_9$.
   (b) Sei $\pi \in S_n$ eine beliebige Permutation. Zeigen oder widerlegen Sie: Es existiert stets ein $d > 0$ mit $\pi^d = \text{id}$.

7. Sei $B = (b_1, b_2)$ eine Basis von V und sei Δ_B die zu B gehörige Determinantenfunktion. Berechnen Sie $\Delta_B(a \cdot b_1 + b \cdot b_2, c \cdot b_1 + d \cdot b_2 + a \cdot b_1 + b \cdot b_2)$.

8. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und V^* der Dualraum von V. Die Abbildung $\sigma : V^* \times V \to K$ sei durch $\sigma(\phi, v) := \phi(v)$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie:

   (a) Die Abbildung σ ist stets multilinear.
   (b) Die Abbildung σ ist stets linear.