Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
9. Übungsblatt für den 4. Juni 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$. Zeigen Sie, dass σ eine Bilinearform ist.

2. Sei $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie: Es gibt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sodass $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$.

3. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{Z}_5$)

   (b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$)

   (c) $C \in \mathbb{R}^{100}_{100}$ mit $C_{i,j} = \frac{i^j}{100}$ für $i, j = 1, \ldots, 100$ (mit Mathematica).

4. Zeigen oder widerlegen Sie: Sei $A \in K^n_n$. Wenn man ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) von A zu einer anderen Zeile (Spalte) von A addiert, dann ändert sich $\det(A)$ nicht.

5. Sei $B = ((1, 4, 1, 6), (2, 1, 3, 1), (0, 0, 0, 3), (1, 1, 2, 3))$. Ist B eine Basis des $(\mathbb{Z}_7)^4$?

6. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $\det(A^{-1})$ über $\mathbb{R}$.

7. Sei A eine orthogonale Matrix. Bestimmen Sie $\det(A)$.

8. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die Vandermonde'sche Determinantenformel (siehe Beispiel 44.18 im Vorlesungsskriptum).