Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
1.Übungsblatt für den 15. März 2012

(1) (cf. [2, p. 28]) Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie

$$p_n \leq 2^{(2^{n-1})}. \tag{1}$$

Sei nun $\pi(n) := \#\{p \in \mathbb{N} \,:\, p \leq n \text{ und } p \text{ prim}\}$. Verwenden Sie (1), um zu zeigen, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\pi(n) \geq \log_2(\log_2(n)).$$

Hinweis: Euklids Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt ([1, Buch IX, Satz 20], 270 v.Chr.) beruht auf folgender Überlegung: Seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ Primzahlen. Dann ist der kleinste positive Teiler von $q_1 \cdot q_2 \cdots q_n + 1$ eine Primzahl, die von allen q_i verschieden ist.

(2) Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie, auch, ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung zu verwenden, dass folgendes gilt: wenn

$$\begin{aligned} a &= \prod {p_i}^{\alpha_i} \\ b &= \prod {p_i}^{\beta_i}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$, und fast alle $\alpha_i, \beta_i = 0$ sind, dann gilt $a \mid b$ genau dann, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\alpha_i \leq \beta_i$ ist. (Zeigen Sie, dass diese Aussage für alle Primfaktorzerlegungen von a und b gilt. Folgt daraus die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung?)

(3) (a) Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$x = ua + vb.$$

Zeigen Sie: Wenn x sowohl a als auch b teilt, so gilt $x = \mathrm{ggT}(a, b)$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ so, dass $a \mid y$, $b \mid y$, $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie (ohne Primfaktorzerlegung): $a \cdot b \mid y$.

(4) Seien $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gekürzt, und die Nenner b und d teilerfremd sind, so ist auch der Bruch $\frac{ad+bc}{bd}$ gekürzt.

Literatur

[1] Euklid. *Die Elemente*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1991. Buch I–XIII. [Book I–XIII], Based on Heiberg's text, Translated from the Greek and edited by Clemens Thaer.

[2] R. Remmert and P. Ullrich. *Elementare Zahlentheorie*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.