Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
4.Übungsblatt für den 19. April 2012

(13) (a) (ggT in $\mathbb{Z}[i]$) Sei R ein Euklidischer Integritätsbereich, und seien $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass es ein $d \in R$ gibt, sodass
  (i) $d \mid a$, $d \mid b$, und
  (ii) $\forall t \in R : (t \mid a \wedge t \mid b) \Rightarrow t \mid d$.

  So ein d bezeichnen wir als einen *größten gemeinsamen Teiler* von a und b. *Hinweis:* Betrachten Sie ein erzeugendes Element des von a und b erzeugten Ideals.

  (b) Berechnen Sie einen solchen ggT in $\mathbb{Z}[i]$ von $0 + 13\,i$ und $95 - 6\,i$. *Hinweis:* Euklidischer Algorithmus.

(14) (Einfache Ringe) Ein Ring R ist *einfach*, wenn er keine Ideale außer $\{0\}$ und R hat. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Behauptungen äquivalent sind:
  (a) R ist ein einfacher kommutativer Ring mit Eins, und $|R| \geq 2$.
  (b) R ist ein Körper.

(15) (Gleichungen)
  (a) Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, sodass $(5 + 12\,i)\,x + (4 - 7i)\,y = 2$.
  (b) Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, sodass $(5 + 12\,i)\,x + (4 - 6\,i)\,y = 1$.
  (c) Bestimmen Sie $p, q \in \mathbb{R}[x]$, sodass $p \cdot (x^4 + 8x^2 + 16) + q \cdot (x^3 + 3x^2 + 4x + 12) = x^3 + 4x$.

(16) (Irreduzible Elemente) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $r \in R$ mit $r \neq 0$.
  (a) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.
    (i) r ist irreduzibel.
    (ii) Das Ideal (r) ist ein maximales Element in der Menge aller Hauptideale von R, die ungleich R sind.
  (b) Zeigen Sie: Wenn r irreduzibel ist, ist auch jedes zu r assoziierte Element irreduzibel.