Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
8.Übungsblatt für den 24. Mai 2012

(29) (a) Sei $(G, \cdot)$ eine endliche, abelsche Gruppe mit n Elementen. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ gilt $g^n = 1_G$.

(b) Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe mit n Elementen. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $g^m = 1_G$. (*Definition:* Die kleinste natürliche Zahl m mit $g^m = 1_G$ nennt man die Ordnung von g.)

(30) (a) Zeigen Sie, dass ein Homomorphismus von $(\mathbb{Z}_n, +)$ nach $(\mathbb{Z}_m, +)$ bereits durch das Bild der Restklasse $[1]_n$ eindeutig bestimmt ist.

(b) Zeigen Sie: Falls $nx \equiv 0 \pmod{m}$, dann ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, $\varphi([a]_n) = [xa]_m$ wohldefiniert.

(c) Zeigen Sie: Die Anzahl aller Homomorphismen von $(\mathbb{Z}_n, +)$ nach $(\mathbb{Z}_m, +)$ ist gleich $\mathrm{ggT}(n, m)$.

(31) Nach Aufgabe (31) gibt es insbesondere n Gruppenendomorphismen von $(\mathbb{Z}_n, +)$. Wieviele davon sind Automorphismen?

(32) (a) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und sei H eine nichtleere Teilmenge von G, sodass für alle $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 \circ h_2 \in H$. Muss dann H Trägermenge einer Untergruppe von $(G, \circ)$ sein?

(b) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und sei H eine *endliche* nichtleere Teilmenge von G, sodass für alle $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 \circ h_2 \in H$. Muss dann H Trägermenge einer Untergruppe von $(G, \circ)$ sein?