Übung1

1. Beweisen Sie für Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ im 3-dim. Raum und reelle Zahlen α, β :

   (a) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

   (b) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{u}\|$

   (c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

2. Man beweise die Identität $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.

3. Seien $\mathbf{u} = (2, k), \mathbf{v} = (3, 5)$ Vektoren.Man bestimme k so,dass $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$

   (a) parallel sind

   (b) orthogonal sind

   (c) den Winkel $\frac{\pi}{4}$ Radianten einschließen.

4. Zeigen Sie: Die Mittelpunkte der Seiten eines (beliebigen) Vierecks sind Eckpunkte eines Parallelogramms.

5. Man zeige,dass die Punkte $A = (3, 0, 2), B = (4, 3, 0), C = (8, 1, -1)$ ein rechtwinkliges Dreieck aufspannen.An welcher Ecke liegt der rechte Winkel?

6. Zeigen Sie,dass die 4 Punkte $A = (1, 1, 2), B = (1, 4, -1), C = (0, 5, 3)$ und $D = (0, -1, 9)$ in einer Ebene liegen und berechnen Sie die Fläche des Vierecks ABCD.