Übung 5

1. Sei $V = P_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2.

   (a) Zeigen Sie, dass $B = (b_1, b_2, b_3), b_1(x) = x^2 - 2x + 5, b_2(x) = 2x^2 - 3x, b_3(x) = x + 3$, eine geordnete Basis von V ist.

   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $v(x) = x^2 + 4x - 3$ bzgl. dieser Basis.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$, und $S \subseteq V$ mit $L(S) = V$. Zeigen Sie:

   (a) S enthält eine Basis von V.

   (b) Hat S n Elemente, dann ist S eine Basis von V.

3. Sei V ein Vektorraum und W ein Unterraum von V. Zeigen Sie:

   (a) $\dim W \leq \dim V$

   (b) Ist V endlichdimensional, dann folgt aus $\dim W = \dim V$ auch $V = W$.

4. Sei V ein Vektorraum und $\{u_1, u_2, ..., u_r, v_1, v_2, ..., v_s\}$, $r, s \in \mathbb{N}$, eine linear unabhängige Teilmenge von V.

   Zeigen Sie: $L(\{u_1, ..., u_r\}) \cap L(\{v_1, v_2, ..., v_s\}) = \{0\}$.

5. Sei M eine unendliche Menge, K ein Körper und $F(M)$ der Vektorraum aller Funktionen $f : M \longrightarrow K$. Zeigen Sie:

   (a) $U = \{f : M \longrightarrow K : \text{ es gibt nur endlich viele } x \in M \text{ mit } f(x) \neq 0\}$ ist ein Unterraum von V.

   (b) $\{f_x : x \in M\}$ ist eine Basis von U, wobei für $x \in M$, $f_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$.