Übung 11

1. Sei V ein Vektorraum, $B = \{b_1, ..., b_n\}, n \in \mathbb{N}$, eine Basis von V und $h : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

   (a) Falls $h(b_1) = h(b_2) = ... = h(b_n) = 0$, dann ist h die Nullabbildung.

   (b) Falls $h(b_1) = b_1, h(b_2) = b_2, ...h(b_n) = b_n$, dann ist h die identische Abbildung $id_V : V \longrightarrow V, id_V(v) = v$ für alle $v \in V$.

2. Sei $V = \mathbb{R}^3$, B die kanonische Basis, $C = ((-1,2,1),(1,0,3),(2,2,-1))$. Berechnen Sie die Abbildungsvorschrift der linearen Abbildung h, für welche $A_{h,B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ gilt.

3. Sei $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, h((x,y)) = (11x - 2y, -8x + 5y, 16x - 2y), g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, g((x,y,z)) = (2x - 7y - 4z, 3x + y + 4z, 6x - 8y + z), B = ((1,3),(2,5)), C = ((-1,3,4),(0,2,1),(2,3,6))$ Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, D die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $A_{g \circ h,B,D}$.

4. Sei V ein Vektorraum, $h : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung, B, B_1, C, C_1 Basen von V. Zeigen Sie: $A_{h,B_1,C_1} = A_{id_V,C,C_1} \cdot A_{h,B,C} \cdot A_{id_V,B_1,B}$

5. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -1 & 1 & 2 & & 0 & \\ & -2 & 1 & 3 & & \\ & & -3 & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & 0 & & & & (n-1) \\ & & & & -(n-1) & 1 \end{pmatrix}$