Informations- und Codierungstheorie
2. Übungsblatt für den 16. Oktober 2012

1. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$, und sei $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie:
$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$
Ist die Voraussetzung $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ notwendig?

2. Sei $\varepsilon > 0$, sei $p \in]0, 1[$, und sei $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$: $r(n) \leq n(p - \varepsilon)$. Zeigen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=r(n)}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1.$$

3. (Wahrscheinlichkeitsrechung) Wir würfeln zweimal und werfen eine Münze einmal. Fällt die Münze auf "Zahl", zählen wir beide Augenzahlen der Würfel zusammen, fällt die Münze auf "Kopf", so zählen wir nur die höhere Augenzahl der beiden Würfe. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und eine Zufallsvariable an, die dieses Experiment beschreiben.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze auf "Kopf" gefallen ist, wenn wir schon wissen, dass das Ergebnis des Experiments die Zahl 6 ist?

4. ([1, Exercise 3.12]) Eine Urne enthält genau eine Kugel, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder weiß oder schwarz ist. Eine weiße Kugel wird in die Urne dazugelegt, die Urne geschüttelt, und eine Kugel wird herausgenommen. Die herausgenommene Kugel ist weiß. (Die Urne ist also wieder im gleichen Zustand wie zuvor.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich jetzt in der Urne eine weiße Kugel befindet?

   Hinweis: Wählen Sie als Wahrscheinlichkeitsraum $\{(0,0), (0,1), (1,0), (0,0)\}$. Dabei soll im Paar (ω_1, ω_2) die Zahl $\omega_1 = 0$ sein, falls die Kugel, die am Beginn in der Urne ist, weiß ist. Wenn $\omega_2 = 1$, so nehmen Sie die neu hinzugekommene Kugel heraus, wenn $\omega_2 = 0$, so nehmen Sie die Kugel heraus, die bereits in der Urne war. Die Zufallsvariabe X_1 beschreibe die Farbe der gezogenen Kugel, die Zufallsvariable X_2 beschreibe die Farbe der Kugel, die in der Urne zurückbleibt.

5. (Quellcodierung) Wir wollen eine Nachricht über einen digitalen Kanal, der nur 0 oder 1 übertragen kann, schicken. Die Nachricht ist eine Folge aus den Zeichen `A`, `B`, `C`, `D`, `E`. Eine typische Nachricht wäre etwa

```
AABAAAAAAAAACAAAAAAAABAAAAAAAAAEAAAAAAAAAAAEAAEAAEAAAAA
AAAEAACAABBAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
EAAAAAAAAAAAAAAEAAAAAABAAAAABAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
AAAAAAAAAAAAEAAEAAAAAAAAAAAAAAAAABAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAB
EAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAACAAAACAAAAAAAAAABAAAAAAB
AAAAAAAAAAAAAAAAAAAACBAAAAABAAAAEAAAAAAAAAAAAABAAAAAAAA
CAAAABAAAAAAEAAAABAAAAAAAAAAAACAAAAAAAAAAAAAAAABAAAAAAA
BAAAAAACAAABAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAABAAAAAAAAAAAAAAAAAAAB
AAAAAAAAABAAAAAABAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAABAAAAABB
AAAAA
```

   Dabei wissen wir, dass an jeder Stelle der Nachricht mit Wahrscheinlichkeit 0.9 ein `A`, mit 0.06 ein `B`, mit 0.015 ein `C`, mit 0.015 ein `D` und mit Wahrscheinlichkeit 0.01 ein `E` vorkommt.

   Ziel ist es, für die Übertragung diese Nachricht als Folge von 0 und 1 zu kodieren. Dabei sollen wir für jedes Zeichen im Durchschnitt nur höchstens 0.8 Bits benötigen – eine Folge von 100 Zeichen sollte im Durchschnitt also auf 80 Bits komprimiert werden können.

(a) Versuchen Sie, ein Verfahren zur Kompression zu finden!

(b) Können Sie die Kompressionsrate Ihres Verfahrens bestimmen? Wie würden Sie die Kompressionsrate definieren und messen?

Bonusbeispiele zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

6. ([1, Exercise 3.14]) In einem Spiel werden zwei Münzen geworfen. Fällt eine der Münzen auf Kopf, so haben Sie einen Preis gewonnen. Um den Preis zu erhalten, müssen Sie auf eine der Münzen zeigen, die auf Kopf fällt.

   Sie sehen Fritz bei diesem Spiel zu. Er wirft zwei Münzen, zeigt auf eine und sagt wahrheitsgemäß: "Diese Münze ist auf Kopf gefallen, ich habe gewonnen." Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Münze auf Kopf gefallen ist?

   Hinweis: Es geht wieder um die Wahl eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums und geeigneter Zufallsvariablen.

7. In einer Quizshow stehen hinter drei verschlossenen Türen ein Auto und zwei Ziegen. Der Kandidat zeigt auf eine Tür. Darauf öffnet der Quizmaster, der weiß, hinter welcher Tür das Auto ist, eine der anderen beiden Türen, und zwar so, dass hinter dieser Tür eine Ziege steht. Der Kandidat kann nun zwischen zwei Türen wählen. Die Tür, auf die er bei dieser zweiten Wahl zeigt, wird geöffnet, und er gewinnt, was hinter dieser Tür ist. Der Kandidat hat nun zwei Möglichkeiten: Er kann

   (a) bei seiner anfangs gewählten Tür bleiben.

   (b) auf die andere Tür zeigen.

   Berechnen Sie für jede dieser Optionen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kandidat das Auto gewinnt.

   Geben Sie dazu eine Zufallsvariable an, die von zwei Würfen mit einem dreiseitigen Würfel und einem Münzwurf abhängt, und deren Ergebnis 1 ist, falls der Kandidat das Auto gewinnt. Der erste Wurf gebe dabei an, wo das Auto steht, der zweite Wurf, auf welche Tür der Kandidat zuerst zeigt, und der Münzwurf, welche Tür der Quizmaster öffnet, falls er die Wahl hat.

Literatur

[1] D. J. C. MacKay. *Information theory, inference and learning algorithms.* Cambridge University Press, New York, 2003. The book can be viewed at `http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itprnn/book.html`.