

Informations- und Codierungstheorie
3.Übungsblatt für den 23. Oktober 2012

Wir besprechen am 23.10. auch die Beispiele (2.2) und (2.5).

- (1) (a) Wie oft muss man würfeln, damit das in der VL bewiesene schwache Gesetz der großen Zahlen garantiert, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Augenzahl zwischen 3.3 und 3.7 liegt, größer als 99% ist?
(b) Wie oft muss man wirklich würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die mittlere Augenzahl zwischen 3.3 und 3.7 liegt, größer als 99% ist?
- (2) Berechnen Sie die Entropie $H(X)$ für folgende Zufallsvariablen:
 - (a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X((\omega_1, \omega_2)) := \omega_1 - \omega_2$.
 - (b) X ist die Anzahl der Würfe auf "Zahl" bei 2-maligem Werfen einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p "Zahl" zeigt.
- (3) Bestimmen Sie die Entropie $H(X)$ für folgende Zufallsvariablen:
 - (a) X nimmt die Werte (a, b, c) mit Wahrscheinlichkeiten $(0, 0.6, 0.4)$ an.
 - (b) X nimmt die Werte (a, b, c, d, e) mit Wahrscheinlichkeiten $(0.9, 0.06, 0.015, 0.015, 0.01)$ an.
 - (c) X nimmt die Werte (a, b, c, d) mit Wahrscheinlichkeiten $(0.6, 0.3, 0.05, 0.05)$ an.
- (4) Sei $X : \Omega \rightarrow A$ eine Zufallsvariable, und sei $X^{[2]} : \Omega^2 \rightarrow A^2$, $X^{[2]}((\omega_1, \omega_2)) := (X(\omega_1), X(\omega_2))$. Zeigen Sie $H(X^{[2]}) = 2 H(X)$.
- (5) Zeigen Sie:

$$H(p, (1-p) \cdot q, (1-p) \cdot (1-q)) = H(p, 1-p) + (1-p) \cdot H(q, 1-q).$$

Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

- (6) (**Bonusbeispiel**) Sei $X : \Omega \rightarrow A$ eine Zufallsvariable. Wir definieren eine Zufallsvariable Y durch

$$Y(\omega) := \log_2(P(\{\omega' \in \Omega \mid X(\omega') = X(\omega)\})) = \log_2(P[X = X(\omega)]).$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von Y !