Informations- und Codierungstheorie
9. Übungsblatt für den 4. Dezember 2012

(1) (Mathematica) Berechnen Sie den Transinformationsgehalt $T(A,(p_1,p_2))$ für folgende Kanalmatrizen, und zeichnen Sie die Ergebnisse (mit `Plot`).

(a) $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$

(2) Berechnen Sie die Kanalkapazität für die Kanäle, die durch folgende Matrizen gegeben sind:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(3) Seien $X : \Omega \to \{1,2\}$ und $Y : \Omega \to \{1,2,3\}$ Zufallsvariablen, sodass $P[X=1] = P[X=2] = \frac{1}{2}$. Sei $A(i,j) := P[Y=j|X=i]$. Berechnen Sie für folgende drei Matrizen jeweils $I(X;Y)$.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$

(4) Es seien $X : \Omega \to \{1,2\}$, $Y : \Omega \to \{1,2,3\}$ und $Z : \Omega \to \{1,2,3\}$ Zufallsvariablen, sodass (X,Y,Z) eine Markovkette ist. Es sei $A(i,j) := P[Y=j|X=i]$, $B(i,j) := P[Z=j|Y=i]$, und $C(i,j) := P[Z=j|X=i]$. Gegeben sind $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix C.

(5) Sei A eine stochastische $L \times M$-Matrix, und B eine stochastische $M \times N$-Matrix. Zeigen Sie, dass für alle $(p_1,\dots,p_L) \in [0,1]^L$ mit $\sum_{i=1}^{L} p_i = 1$ gilt:

(a) $T(A \cdot B,\ (p_1,\dots,p_L)) \le T(A,\ (p_1,\dots,p_L))$.

(b) Die Kapazität eines Kanals mit Kanalmatrix $A \cdot B$ ist höchstens so groß wie die Kapazität eines Kanals mit Matrix A.

(c) Die Kapazität eines Kanals mit Kanalmatrix $A \cdot B$ ist höchstens so groß wie die Kapazität eines Kanals mit Matrix B.

Hinweis: Definieren Sie geeignete Zufallsvariablen X, Y, Z und bringen Sie $I(X;Y)$, $I(X;Z)$ und $I(Y;Z)$ mit den gesuchten Transinformationsraten in Zusammenhang.

(6) (Bonusbeispiel) Sei $p \in [0, \frac{1}{2}]$, und seien $X : \Omega \to \{0,1\}$ und $Y : \Omega \to \{0,1\}$ Zufallsvariablen mit der Eigenschaft, dass $P(\{\omega | X(\omega) = Y(\omega)\}) \ge 1-p$. Zeigen Sie, dass $H(X|Y) \le H(p, 1-p)$. *Hinweis:* Eine Möglichkeit ist, eine dritte Zufallsvariable F zu definieren, sodass $F = 0$, wenn $X = Y$ und $F = 1$ sonst. Dann benutzen Sie die Kettenregel zweimal, um $H(X \otimes F|Y)$ auf zwei verschiedene Arten auszurechnen.