Informations- und Codierungstheorie
10. Übungsblatt für den 11. Dezember 2012

(1) Wir betrachten die Hintereinanderschaltung von Kanälen. Dazu schalten wir n binäre symmetrische Kanäle mit der Kanalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

mit $p < 1/2$ hintereinander. Diese Hintereinanderschaltung hat die Kanalmatrix A^n. Ihre Kanalkapazität bezeichnen wir mit $c(A^n)$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} c(A^n) = 0.$$

(2) Sei A eine Kanalmatrix. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind.
  (a) Alle Zeilen von A sind gleich.
  (b) Der Transinformationsgehalt $T(A, (p_1, \ldots, p_M)) = 0$ für alle $(p_1, \ldots, p_M) \in [0,1]^M$ mit $\sum_{i=1}^M p_i = 1$.

(3) Auf dem ersten Übungsblatt stand (im wesentlichen) folgendes Beispiel:

> Sei $m \in \mathbb{N}$. Ein Komprimierungsprogramm nimmt Fehler in Kauf und komprimiert jede Datei mit m Bits auf eine Datei mit $\frac{2m}{3}$ Bits. Wieviele Bits werden, im Durchschnitt über alle Files der Länge m, durch Komprimieren und Dekomprimieren mindestens verändert? *Hinweis:* Das Komprimierungsprogramm erlaubt ihnen, den Kanal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit Rate $R = \frac{3}{2}$ zu verwenden. Was können Sie über p_B aussagen?

  (a) Wie können Sie $U, \overline{X}, \overline{Y}, V$ und den Kanal definieren, sodass Satz 4.30 aus dem Skriptum die untere Schranke für $p_B \approx 0.0614905$ liefert?
  (b) Wie stark können Sie höchstens komprimieren, wenn Sie eine Bitfehlerrate von $\leq 20\%$ akzeptabel finden?

(4) Wir zeigen in diesem Beispiel die Ungleichung von Fano ([Ash, 1990, Theorem 3.7.1]). Sei $s \geq 2$, und seien $X : \Omega \to \{1, 2, \ldots, s\}$ und $Y : \Omega \to \{1, 2, \ldots, s\}$ Zufallsvariablen. (Wir stellen uns vor, dass X und Y Eingabe und Ausgabe eines Kanals sind.) Sei $p_E := P[X \neq Y]$. Zeigen Sie

$$H(X|Y) \leq H(p_E,\, 1-p_E) + p_E \cdot \log_2(s-1).$$

(5) Seien $X_1 : \Omega \to A_1$, $X_2 : \Omega \to A_2$, $Y_1 : \Omega \to B_1$, $Y_2 : \Omega \to B_2$ Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass für alle $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ und $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ mit $P[X_1 \otimes X_2 = (a_1, a_2)] > 0$ gilt:

$$P[Y_1 \otimes Y_2 = (b_1, b_2) | X_1 \otimes X_2 = (a_1, a_2)] = P[Y_1 = b_1 | X_1 = a_1] \cdot P[Y_2 = b_2 | X_2 = a_2]. \quad \text{(A)}$$

  (a) Zeigen Sie $I(X_1 \otimes X_2; Y_1 \otimes Y_2) \leq I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2)$.
  (b) Zeigen Sie, dass $I(X_1 \otimes X_2; Y_1 \otimes Y_2) \leq I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2)$ nicht gelten muss, wenn (A) nicht erfüllt ist.

Literatur

[Ash, 1990] Ash, R. B. (1990). *Information theory.* Dover Publications Inc., New York. Corrected reprint of the 1965 original.