Informations- und Codierungstheorie
11. Übungsblatt für den 8. Jänner 2013

(1) Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1,2\}$, $Y : \Omega \to \{1,2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i,j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $|GT(X, Y, 10, \frac{1}{4})|$.

(2) Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1,2\}$, $Y : \Omega \to \{1,2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i,j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $P[(X \otimes Y)^{[10]} \in GT(X, Y, 10, \frac{1}{4})]$.

(3) Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1,2\}$, $Y : \Omega \to \{1,2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i,j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Seien $X^{[10]}_{\text{allein}}$ und $Y^{[10]}_{\text{allein}}$ Zufallsvariablen, die auf $\Omega^{10} \times \Omega^{10}$ durch

$$\begin{aligned} X^{[10]}_{\text{allein}}(\omega_1, \omega_2) &= X^{[10]}(\omega_1) \\ Y^{[10]}_{\text{allein}}(\omega_1, \omega_2) &= Y^{[10]}(\omega_2) \end{aligned}$$

für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^{10}$ definiert sind. Berechnen Sie

$$P[(X^{[10]}_{\text{allein}} \otimes Y^{[10]}_{\text{allein}})^T \in GT(X, Y, 10, \frac{1}{4})].$$

(4) Sei K ein binärer Kanal mit Kanalmatrix $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Seien $s = 2$, $n = 2$, $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 1$, $\overline{x}^{(1)} = 00$, $\overline{x}^{(2)} = 11$. Wir definieren $B_1 = \{00, 10\}$, $B_2 = \{11, 01\}$. Berechnen Sie die durchschnittliche Fehlerplausibilität für

$$\mathcal{C} = \big((\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}), (B_1, B_2)\big).$$

(5) Sei $p \in (0, \frac{1}{2}]$, sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1,2\}$, $Y : \Omega \to \{1,2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i,j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$. Wir konstruieren nun durch $2n$ faire Münzwürfe zwei Folgen $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ in $\{1,2\}^n$. Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit q, dass $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$ gemeinsam typisch für $X \otimes Y$ zum Parameter β ist, gilt:

$$q \leq 2^{n(-I(X;Y)+\beta)}.$$

Hinweis: Das ist besser als die Schranke aus Lemma 4.37.