Informations- und Codierungstheorie
13.Übungsblatt für den 22. Jänner 2013

Aus den Sätze von Shannon kann man auch Resultate für das *diskrete Kugelpackungsproblem* herleiten. Seien dazu $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \{0,1\}^n$. Die *Hamming-Distanz* von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist definiert durch

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} \ : \ x_i \neq y_i\}|,$$

also als die Anzahl der Stellen, an denen sich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ unterscheiden. Für einen Code $\mathcal{C} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}) \in (\{0,1\}^n)^s$ ist die Minimaldistanz von $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$d_{\min}(\mathcal{C}) = \min\{d(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) \,|\, i \neq j\}.$$

Sei $A(n,d)$ das maximale $s \in \mathbb{N}_0$, sodass es einen binären Code mit s Codewörtern der Länge n und Minimaldistanz $\leq d$ gibt. (Bsp.: $(A(n,0) = \infty$, $A(n,1) = 2^n$, $A(n,n) = 2)$.

(1) Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, 2np+1))}{n} \leq 1 - H(p). \tag{A}$$

Hinweis: Es reicht, dass für alle ε gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, 2np+1))}{n} \leq 1 - H(p - \varepsilon).$$

Die Rate des n-ten Übetragungssystems aus Beispiel (12.3) ist $\frac{\lfloor \log_2(s(n)) \rfloor}{n}$. Für $s(n) := A(n, 2np+1)$ erhalten wir ein Übetragungssystem mit Rate $R(n) := \frac{\lfloor \log_2(A(n,2np+1)) \rfloor}{n}$ für einen Kanal mit Kapazität $1 - H(p-\varepsilon, 1-(p-\varepsilon))$. Somit gilt $H(p_B(n)) \geq 1 - \frac{1-H(p-\varepsilon,1-(p-\varepsilon))}{R(n)}$. Betrachten sie nun den Limes superior für $n \to \infty$.

(2) Folgern Sie aus der Ungleichung (A), dass für alle $\delta \in [0,1]$ gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, n\delta))}{n} \leq 1 - H(\frac{\delta}{2}).$$

(3) [vL99] Sei $\delta \in [0, \frac{1}{2})$. Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{\lfloor \delta n \rfloor} \binom{n}{i} \leq 2^{nH(\delta)}$.

(4) Sei $\delta \in [0, \frac{1}{2})$. Zeigen Sie $|A(n, n\delta)| \geq 2^{n(1-H(\delta))}$. *Hinweis:* Wählen Sie eine Menge von Vektoren aus $\{0,1\}^n$, die maximal mit der Eigenschaft ist, dass ihre Minimaldistanz $\leq n\delta$ ist. Begründen Sie, warum dann jeder Vektor in $\{0,1\}^n$ in einer der Kugeln (bezüglich der Hamming-Metrik) um diese gewählten Vektoren mit Radius $\lfloor n\delta \rfloor$ liegen muss. Folgern Sie daraus $|A(n, n\delta)| \sum_{i=0}^{\lfloor \delta n \rfloor} \binom{n}{i} \geq 2^n$ und benutzen Sie dann Beispiel (3).

References

[vL99] J. H. van Lint, *Introduction to coding theory*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 86, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 1664228 (2000a:94001)