Algebra (Informatik)
10. Übungsblatt für den 10. Juni 2013

(1) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 6 & -12 & -6 \\ -15 & 18 & 3 \end{pmatrix}$, und sei $h_A : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_4$, $h_A(v) = A \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}_3$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}\,(h_A)$.
(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $A \cdot x = 0$.
(c) Bestimmen Sie eine Basis für $\mathrm{Im}\,(h_A)$.
(d) Bestimmen Sie eine Basis für den Spaltenraum von A.
(e) Überprüfen Sie, ob Ihre Ergebnisse mit dem Satz "$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h))$" in Einklang sind.

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist h_A ein Epimorphismus?
(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist h_A ein Monomorphismus?
(c) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ den Kern von h_A.

(3) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn h eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$ ist und $h \neq 0$, dann gilt für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$:

$$(v_1, v_2) \text{ linear unabhängig } \Rightarrow (h(v_1), h(v_2)) \text{ linear unabhängig.}$$

Bemerkung: In diesem Beispiel verwenden wir *Folgen* von Vektoren anstelle von *Mengen*. Eine Folge $(v_1, \ldots, v_k)$ aus einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist linear abhängig, wenn es $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ gibt, sodass $\sum_{i=1}^k \lambda_i\, v_i = 0$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$.

(4) Seien $E^{(2)}, E^{(3)}$ die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, und sei

$$\sigma((x, y, z)) := (3x - 2y,\ 2z).$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix $A_{\sigma;E^{(3)},E^{(2)}}$ an.

(5) Eine lineare Abbildung von h von $\mathbb{R}_2$ nach $\mathbb{R}_2$ bildet den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ auf $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ auf $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ ab.

(a) Auf welchen Punkt wird $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ abgebildet?
(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A_{h;E,E}$, wobei $E = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$.

(6) Sei h die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e : x + 2\,y + 2\,z = 0$ spiegelt.

(a) Berechnen Sie $h(v)$ für $v \in \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}$.
(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A_{h;B,B}$ für die Basis

$$B = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)).$$

(c) Bestimmen Sie $A_{h;B,B} \cdot A_{h;B,B}$.