Algebra für Informatik (2013S)

11. Übungsaufgaben

für den 17. Juni 2013

1. Sei $V = \mathbb{R}^3$, E die kanonische Basis, $C = ((1,1,1), (-2,-1,-2), (3,5,2))$, und h sei eine lineare Abbildung, sodass

$$A_{h;E,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie $h((2,3,5))$.

   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift von h.

   (c) Ist h invertierbar?

   (d) Bestimmen Sie $A_{h^{-1},C,E}$.

   (e) Bestimmen Sie ein u, sodass $h(u) = (2,2,2)$.

2. Es seien V, E, C wie in Beispiel 1.

   (a) Bestimmen Sie $A_{\mathrm{id}_V;E,C}$ und $A_{\mathrm{id}_V;C,E}$.

   (b) Berechnen Sie damit ein u mit $(u)_C = (2,3,5)$ sowie $(2,3,5)_C$.

3. Seien $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$h((x,y)) = (11x - 2y,\ -8x + 5y,\ 16x - 2y)$$

   und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g((x,y,z)) = (2x - 7y - 4z,\ 3x + y + 4z,\ 6x - 8y + z)).$$

   Seien ferner $B = ((1,3),\ (2,5))$ und $C = ((-1,3,4),\ (0,2,1),\ (2,3,6))$ Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.
   Berechnen sie $A_{g\circ h;B,E}$. (E sei die passende kanonische Basis.)

4. Sei h die lineare Abbildung von Beispiel (6) am 10. Übungsblatt.

   (a) Bestimmen sie $A_{h,E,E}$ (E sei wieder die kanonische Basis).

   (b) Berechnen Sie $h(v)$ für

$$v \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

   (c) Bestimmen Sie $A_{h;E,E} \cdot A_{h;E,E}$ und $A_{h\circ h;E,E}$.

5. Seien V ein Vektorraum, $h : V \to W$ eine lineare Abbildung, B, B' Basen von V sowie C, C' Basen von W. Zeigen Sie:

$$A_{h,B',C'} = A_{\mathrm{id}_W;C,C'} \cdot A_{h,B,C} \cdot A_{\mathrm{id}_V;B',B}.$$

6. Sei $B = ((3,2),\ (2,1))$ eine Basis im $\mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $h((3,2)) = 2 \cdot (3,2)$ und $h((2,1)) = 3 \cdot (2,1)$. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix von $h^3 + 3h^2 + h + 4\,\mathrm{id} - h^{-1}$ bezüglich B und auch bezüglich der kanonischen Basis.