Musterlösungen - Einf.Alg. / Lehramt, 27.6.2013

June 30, 2013

Aufgabe 1: Für einen Körper K mit 16 Elementen ist (K*,·) zyklisch.

1. Möglichkeit: wie in der Vorlesung ausführlich zeigen, dass eine Nullstelle a von x^5-1 die Ordnung 5 und eine Nullstelle b von x^3-1 die Ordnung 3 haben müssen und dass dann ab die Ordnung 15 hat. 2. Möglichkeit (für Blitzgneißer): (K*,·) ist abelsch mit 15 Elementen und ist nach dem Hauptsatz über abelsche Gruppen zyklisch. 3. Möglichkeit: K $\cong$GF(16) (was man aber zu diesem Zeitpunkt noch nicht weiß) und GF(16)=$\mathbb{Z}_2[x]/(x^4+x+1)$ hat [x] als erzeugendes Element.

Aufgabe 2:

- 4 von 1000 Angestellten sollen zum Tresor: Wähle große Primzahl p ($> 10^{100}$), ein $S\epsilon\mathbb{Z}_p$, ein Polynom f dritten Grades und gebe an die Angestellten die Werte von f an den Stellen 1,2,...,1000 aus.
- $f\epsilon P_n$ist in DNF $:\Longleftrightarrow \forall(i_1,\ldots,i_n)\epsilon\{0,1\}^n\exists d_{i_1\ldots i_n}\epsilon\{0,1\} : f = \Sigma d_{i_1\ldots i_n}{x_1}^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$
- Alle Körper mit 9, 10, 11 und 12 Elementen: 10 und 12 sind keine Primzahlpotenzen, also gibt´s keine Körper. 9 Elemente: GF(9) $= \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$. 11 Elemente: $\mathbb{Z}_{11}$.
- Alle abelschen Gruppen mit 9, 10, 11 und 12 Elementen: Bei 9: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_9$; bei 10 und 11 nur $\mathbb{Z}_{10}$ bzw. $\mathbb{Z}_{11}$. Bei 12: $\mathbb{Z}_{12}$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.