

Kommutative Algebra

4. Übungsblatt für den 16. April 2013

Wir besprechen am 16.4.13 auch die Beispiele 2.4 und die Beispiele auf dem 3. Blatt ab 1b.

- (1) Zeigen Sie, dass in einem faktoriellen Integritätsbereich der Durchschnitt zweier Hauptideale wieder ein Hauptideal ist.
- (2) Die Polynome x und y in $\mathbb{Q}[x, y]$ haben nur konstante gemeinsame Teiler. Trotzdem lässt sich 1 nicht als $ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ schreiben. Zeigen Sie, dass aber folgende Aussage gilt:

Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ so, dass f und g keinen nichtkonstanten gemeinsamen Teiler in $\mathbb{Q}[x, y]$ haben. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$, sodass

$$af + bg \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$$

Hinweis: Wie kann ein gemeinsamer Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x)[y]$ aussehen? (Daraus folgt, dass für irreduzible und nicht assoziierte $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ das Gleichungssystem $f = 0, g = 0$ nur endlich viele Lösungen hat.)

- (3) Finden Sie ein Polynom der Form $af + bg \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ für $f = xy + 1$ und $g = xy^2 + 1$ ($a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$).