Kommutative Algebra
6. Übungsblatt für den 7. Mai 2013

(1) (Algebraische Abhängigkeit) Sei k ein Körper, und sei I ein Ideal von $R := k[x_1, \dots, x_n]$ mit $1 \notin I$. Seien $y_1, \dots, y_m \in k[x_1, \dots, x_n]$. Zeigen Sie, dass folgende beiden Bedingungen äquivalent sind.
  (a) $(y_1 + I, \dots, y_m + I)$ ist algebraisch abhängig über k in R/I.
  (b) $(y_1 + \sqrt{I}, \dots, y_m + \sqrt{I})$ ist algebraisch abhängig über k in $R/\sqrt{I}$.

(2) Sei k ein Körper, $n \geq 2$, und sei I ein Ideal von $R := k[x_1, \dots, x_n]$ mit $1 \notin I$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_1 + I, x_2 + I)$ genau dann algebraisch abhängig über k ist, wenn $I \cap k[x_1, x_2] \neq \{0\}$.

(3) In diesem Beispiel überlegen wir uns, ob die Folge $(x^2 + x, x^3 + 2)$ aus $\mathbb{Q}[x]$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
  (a) Bestimmen Sie eine Transzendenzbasis von $\mathbb{Q}[x]$ über $\mathbb{Q}$.
  (b) Können Sie daraus etwas über die Unabhängigkeit von (x^2+x, x^3+2) herleiten?
  (c) (Mathematica) Berechnen Sie $p(x^2 + x, x^3 + 2)$ für

$$p(t_1, t_2) = -27 + 6t_1 + t_1^3 + 3t_2 - 3t_1t_2 - t_2^2.$$

  Was schließen Sie daraus über die algebraische Abhängigkeit von $x^2 + x$ und $x^3 + 2$?

(4) (Ganze Erweiterungen) Seien A, B Integritätsbereiche mit $A \leq B$, und seien $b_1, \dots, b_n \in B$. Wir nehmen an, dass jedes b_i ganz über A ist. Zeigen Sie, dass $A[\![b_1, \dots, b_n]\!]$ ganz über A ist.

(5) Wir betrachten im folgenden Unterringe von $\mathbb{Q}(x)$.
  (a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{x}$ algebraisch über $\mathbb{Q}[\![x^2]\!]$ ist.
  (b) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{x}$ nicht ganz über $\mathbb{Q}[\![x^2]\!]$ ist. *Hinweis:* Multiplizieren Sie die Gleichung $(\frac{1}{x})^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x^2) \cdot (\frac{1}{x})^i = 0$ mit x^n.
  (c) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{x}$ ganz über $\mathbb{Q}[\![x^2 - 5 \cdot \frac{1}{x}]\!]$ ist. *Hinweis:* Gehen Sie wie im Beweis des Lemmas vor dem Satz zur Noetherschen Normalisierung vor.