Kommutative Algebra
9. Übungsblatt für den 4. Juni 2013

(1) Wir nennen eine Teilmenge T von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ eine *Viertelebene*, wenn es $m, n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,|\, x \geq m \text{ und } y \geq n\}.$$

Zeigen Sie, dass jede Vereinigung von beliebig vielen Viertelebenen eine Vereinigung von endlich vielen Viertelebenen ist.

(2) Seien $f, p, q \in \mathbb{Q}[x,y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= x^3y^3 + 1 \\ p &= 1 + 3x + 2x^2 + x^2y + x^3y \\ q &= xy^2 + x^2y^2 \end{aligned}$$

Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Finden Sie $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x,y]$, sodass $f = a_1\,p + a_2\,q + r$, $\textsc{Deg}(a_1\,p) \leq \textsc{Deg}(f)$, $\textsc{Deg}(a_2\,q) \leq \textsc{Deg}(f)$, und kein Term in r ein Vielfaches von $\textsc{Lt}(p)$ oder $\textsc{Lt}(q)$ ist.

(3) Seien $f, p, q \in \mathbb{Q}[x,y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= x^3y^2 \\ p &= 1 + x^3y + 3x^2y^5 \\ q &= 2x^2y + x^2y^2 \end{aligned}$$

Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Finden Sie $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x,y]$, sodass $f = a_1\,p + a_2\,q + r$, $\textsc{Deg}(a_1\,p) \leq \textsc{Deg}(f)$, $\textsc{Deg}(a_2\,q) \leq \textsc{Deg}(f)$ und kein Term in r ein Vielfaches von $\textsc{Lt}(p)$ oder $\textsc{Lt}(q)$ ist.

(4) Sei $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $f_1 = xy - 1$, $f_2 = y^2 - 1$. Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$.

(a) Zeigen Sie, dass der Rest r bei einer Darstellung $f = a_1f_1 + a_2f_2 + r$ wie in den vorigen Beispielen nicht eindeutig bestimmt ist.

(b) Finden Sie ein Polynom im Ideal $\langle f_1, f_2\rangle$, das nicht das Nullpolynom ist und das keinen Term enthält, der ein Vielfaches von xy oder y^2 ist.

(5) Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass der Rest der Division von f durch ein Hauptideal $\langle f_1\rangle$ eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie also: Sei $\leq$ eine zulässige Ordnung, sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und seien $f, f_1 \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f_1 \neq 0$. Seien $a, b, r, s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ so, dass $f = a\,f_1 + r = b\,f_1 + s$. Wir nehmen an, dass kein Term von r und kein Term von s durch $\textsc{Lt}(f_1)$ teilbar ist. Zeigen Sie $r = s$!